Jassen und Kombinatorik

Bernhard Ruh, Kantonsschule Solothurn

Vortrag gehalten am 2. Oktolustreffen in Wilen b. Sarnen

Bekannt
Die Anzahl Möglichkeiten aus einer Menge mit n-Elementen k auszuwählen (ohne Wiederholung, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) beträgt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Beispiel. Schweizer Lotto: $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$

1 Das Spiel

36 Karten (6 bis As in 4 Farben) werden auf 4 Spieler verteilt. Jeder Spieler erhält 9 Karten.

2 Total Möglichkeiten

Es gibt total

$$N := \binom{36}{9} = 94\,143\,280$$

Möglichkeiten, 9 Karten zu erhalten.

3 Vier Bauern

Wys	Anzahl Möglichkeiten	Wahrscheinlichkeiten		
4 Bauern	$\binom{32}{5} = 201\,376$	$\frac{2}{935}$	0.2%	$\approx \frac{1}{500}$
3 Bauern	$\binom{4}{3}\binom{32}{6} = 3\,624\,768$	$\frac{36}{935}$	3.9%	$\approx \frac{1}{25}$
2 Bauern	$\binom{4}{2}\binom{32}{7} = 20\,195\,136$	$\frac{1404}{6545}$	21.5%	$\approx \frac{1}{5}$
1 Bauer	$\binom{4}{1}\binom{32}{8} = 42\,073\,200$	$\frac{585}{1309}$	44.7%	$\approx \frac{1}{2}$
0 Bauern	$\binom{32}{9} = 28\,048\,800$	$\frac{390}{1309}$	29.8%	$\approx \frac{1}{3}$

4 Blätter

4.1 Einfache Fälle

Wys	Anzahl Möglichkeiten	Wahrscheinlichkeiten		
9 Blatt	4	$\frac{1}{23\,535\,820}$	0.00%	$\approx \frac{1}{25\,000\,000}$
8 Blatt	$4 \cdot 2 \cdot 27 = 216$	$\frac{27}{11\,767\,910}$	0.00%	$\approx \frac{1}{500\,000}$
7 Blatt	$4\left(2\binom{28}{2} + 1\binom{27}{2}\right) = 4428$	$\frac{1107}{23\,535\,820}$	0.00%	$\approx \frac{1}{20\,000}$
6 Blatt	$4\left(2\binom{29}{3} + 2\binom{28}{3}\right) = 55440$	$\frac{9}{15\,283}$	0.06%	$\approx \frac{1}{2\,000}$
5 Blatt	$4\left(2\binom{30}{4} + 3\binom{29}{4}\right) = 504252$	$\frac{621}{115\,940}$	0.54%	$\approx \frac{1}{200}$

4.2 Das Vierblatt

Die konsequent weitergeführte Formel

$$4\left(2\binom{31}{5} + 4\binom{30}{5}\right) = 3\,639\,384$$

ist aus zwei Gründen leider falsch

- Es werden auch jene Vierblätter gezählt, bei denen die restlichen 5 Karten ein Fünfblatt bilden. Die Anzahl Möglichkeiten für ein Vier- und ein Fünfblatt beträgt:

  $$\underbrace{6}_{\text{4-Blatt}} \cdot \underbrace{5}_{\text{5-Blatt}} \cdot \underbrace{4}_{\text{Farbe 4-Blatt}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Farbe 5-Blatt}} = 360$$

- Die Fälle, bei denen man *zwei* Vierblätter besitzt, werden doppelt gezählt. Die Abzählung dieser Fälle habe ich nach folgendem Schema durchgeführt:

Gleiche Farbe			$4 \cdot 27$
Ungleiche Farbe	Gleiche Höhe	Randblätter	$2 \cdot 6 \cdot 26$
		Innenblätter	$4 \cdot 6 \cdot 24$
	Ungleiche Höhe	Zwei Randblätter	$2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 26$
		Ein Randblatt	$2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 25$
		Zwei Innenblätter	$4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 24$

  Dies ergibt 5436 Fälle.

Total ergibt sich

Wys	Anzahl Möglichkeiten	Wahrscheinlichkeiten		
4 Blatt	$3\,633\,588$	$\frac{129\,771}{3\,363\,260}$	3.86%	$\approx \frac{1}{25}$

4.3 Das Einblatt

Man besitzt genau dann (nur) ein Einblatt, wenn keine zwei Karten benachbart sind. Die Methode, welche das analoge Lottoproblem löst, ist nützlich:

Lottoproblem: Auf wie viele Arten kann man 6 aus 45 ziehen, ohne dass 2 benachbarte Ziffern vorkommen (z.B. 1,6,8,32,40,45)
Lösung: Durch das Zusammenziehen

$$1, 6, 8, 32, 40, 45 \longrightarrow 1, 5, 6, 29, 36, 40$$

erhält man die gleichmächtige Menge 6 aus 40 mit der Anzahl $\binom{40}{6}$.

Um die Einblätter abzuzählen, teile ich die 9 Karten auf die 4 Farben auf. Dies geht bis auf Farbentausch auf 11 Arten. Eine dieser Möglichkeiten ist z.B. 4-4-1-0, welche 12 Farbpermutationen besitzt. Die Anzahl Möglichkeiten, von einer Farbe 4 Karten ohne Nachbarn zu besitzen, beträgt nach obiger Idee $\binom{6}{4} = 15$. Man kann also insgesamt $12 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 9 = 24300$ Einblätter der Sorte 4-4-1-0 besitzen. Für die anderen 10 Sorten geht man gleich vor. Insgesamt gilt

Wys	**Anzahl Möglichkeiten**	**Wahrscheinlichkeiten**		
1 Blatt	9 151 024	$\frac{571939}{5883955}$	9.72%	$\approx \frac{1}{10}$

4.4 Das Dreiblatt

Ein (für mich) harter Brocken! Man startet wie üblich mit der Formel

$$D_3 := 4\left(2\binom{32}{6} + 5\binom{31}{6}\right) = 21\,975\,156$$

Leider sind in dieser Formel viele Fälle nicht berücksichtigt:

- Man besitzt noch ein Sechsblatt. Dies geht auf

  $$D_{3,6} = 7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 336$$

  Arten
- Man besitzt noch ein Fünfblatt. Dies geht auf (Uebung)

  $$D_{3,5} = \underbrace{4 \cdot 54}_{\text{gleiche Farbe}} + \underbrace{10368}_{\text{verschiedene Farben}} = 10\,584$$

  Arten.
- Man hat wenigstens noch ein Vierblatt. Dies Anzahl dieser Varianten

  $$D_{3,4} = 8424 + 159\,048 = 167\,472$$

  findet man mühelos (naja).
- Die Fälle, in denen man zwei Dreiblätter besitzt, werden doppelt gezählt. Wie mit etwas Geduld festzustellen ist, geht dies auf

  $$D_{3,3} = 74\,412 + 819\,624 = 894\,036$$

  Arten.

- In $D_{3,3}$ und in D_3 werden die Fälle mit drei Dreiblätter dreifach gezählt. Für die Anzahl Möglichkeiten, drei Dreiblätter zu besitzen, erhält man nunmehr nach kurzem Nachdenken

$$D_{3,3,3} = \underbrace{6 \cdot 7 \cdot 12}_{\text{2 verschiedene Farben}} + \underbrace{4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{3 verschiedene Farben}} = 1876$$

Nun berechnet man noch $D_3 - D_{3,6} - D_{3,5} - D_{3,4} - D_{3,3} + D_{3,3,3}$ (Ein- und Ausschaltformel!) und erhält

Wys	**Anzahl Möglichkeiten**	**Wahrscheinlichkeiten**		
3 Blatt	20 904 604	$\frac{746\,593}{3\,362\,260}$	22.2%	$\approx \frac{1}{5}$

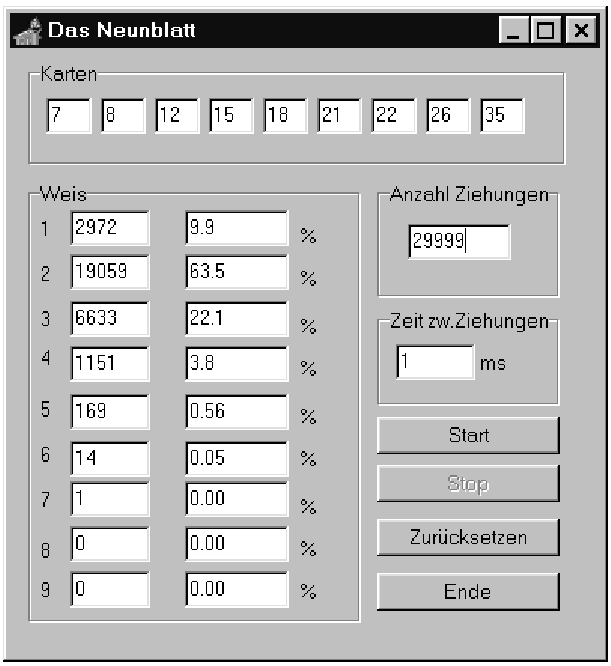
4.5 Das Zweiblatt

Dem Zweiblatt - direkt mühsam zu behandeln - bleibt der grosse Rest:

Wys	**Anzahl Möglichkeiten**	**Wahrscheinlichkeiten**		
2 Blatt	59 889 724	$\frac{14\,972\,431}{23\,535\,820}$	63.6%	$\approx \frac{2}{3}$

5 Ausklang

Die Rechnungen sind fehleranfällig. Durch eine Simulation kann man nachprüfen, dass die Zahlen einigermassen verlässlich sind.



Hätte ich da nicht die Möglichkeit vergessen, dass beim Sechsblatt ....