

Binomialtest

Statistik (Biol./Pharm./HST) – FS 2014



Wdh: Verwerfungsbereich

1. Modell: X : Anz. Patienten mit “partial remission”

$$X \sim \text{Bin}(25, \pi)$$

2. $H_0: \pi = 0.1, H_A: \pi > 0.1$

3. Teststatistik $T = X$

Falls H_0 stimmt: $T \sim \text{Bin}(25, 0.1)$

4. $\alpha = 0.05$

5. Verwerfungsbereich

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$P(T \geq t)$	1	0.93	0.73	0.46	0.24	0.10	0.03	0.01	...

$$K = \{6, 7, \dots, 25\}$$



6. Testentscheid: $t = 6, t \in K \rightarrow H_0$ wird verworfen

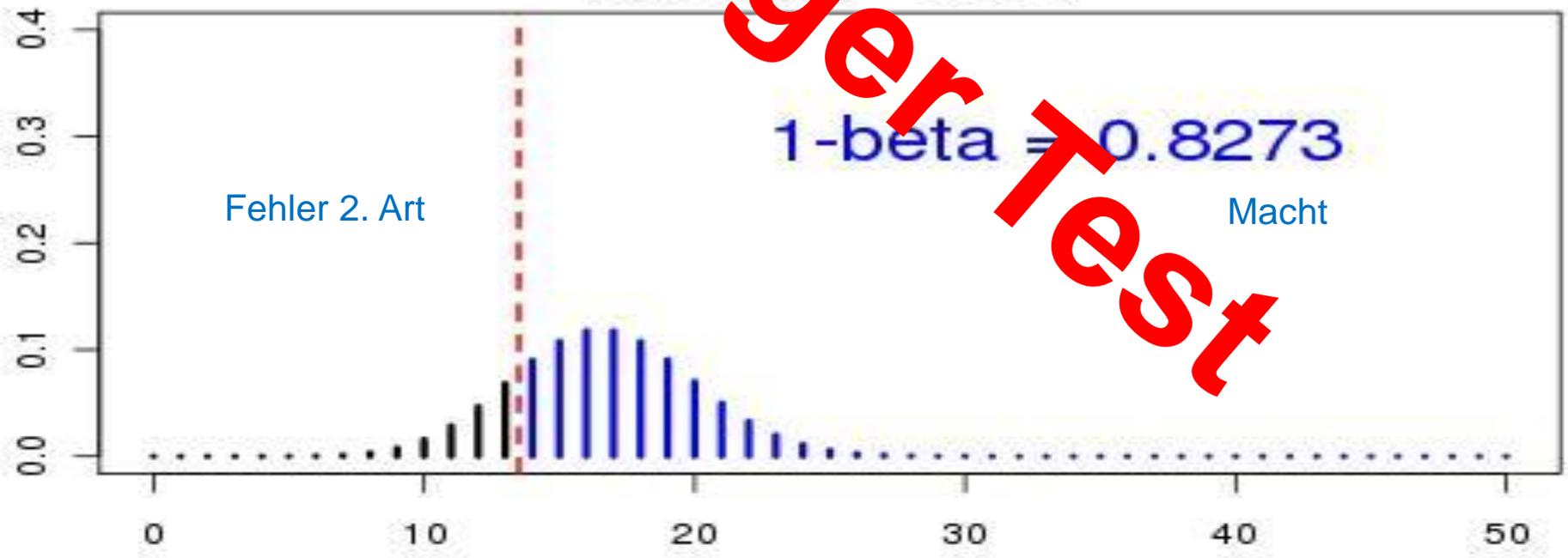
Wdh: Zauberwürfel



H0 true ($p_0 = 0.167$)



H1 true ($p_1 = 0.333$)



$n = 50 / c = 14$

Einseitiger Test

CASINO



ANGEBOT

0.5

~~1~~ Dollar / Würfel

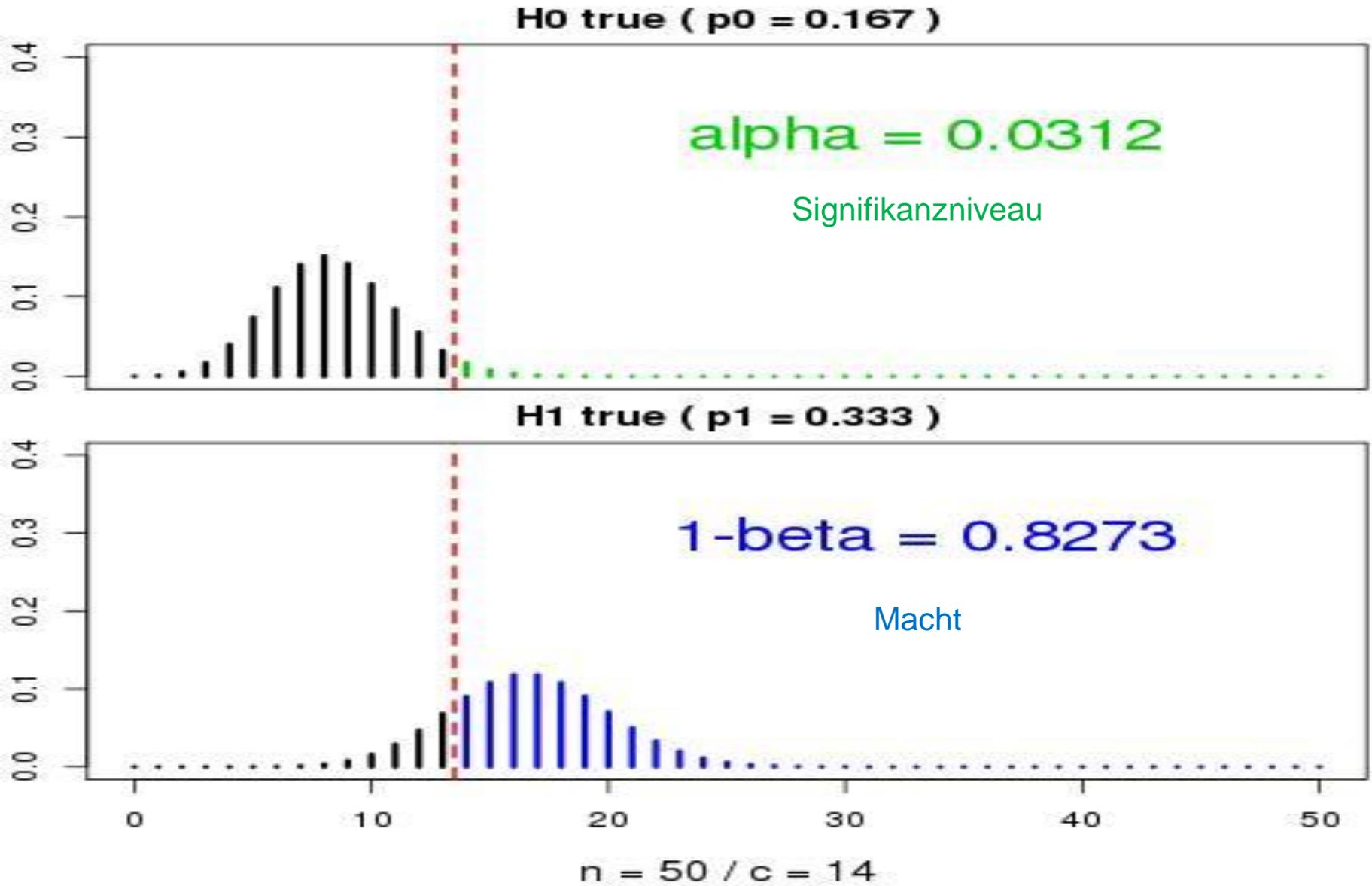
**Sind Würfel
fair?**



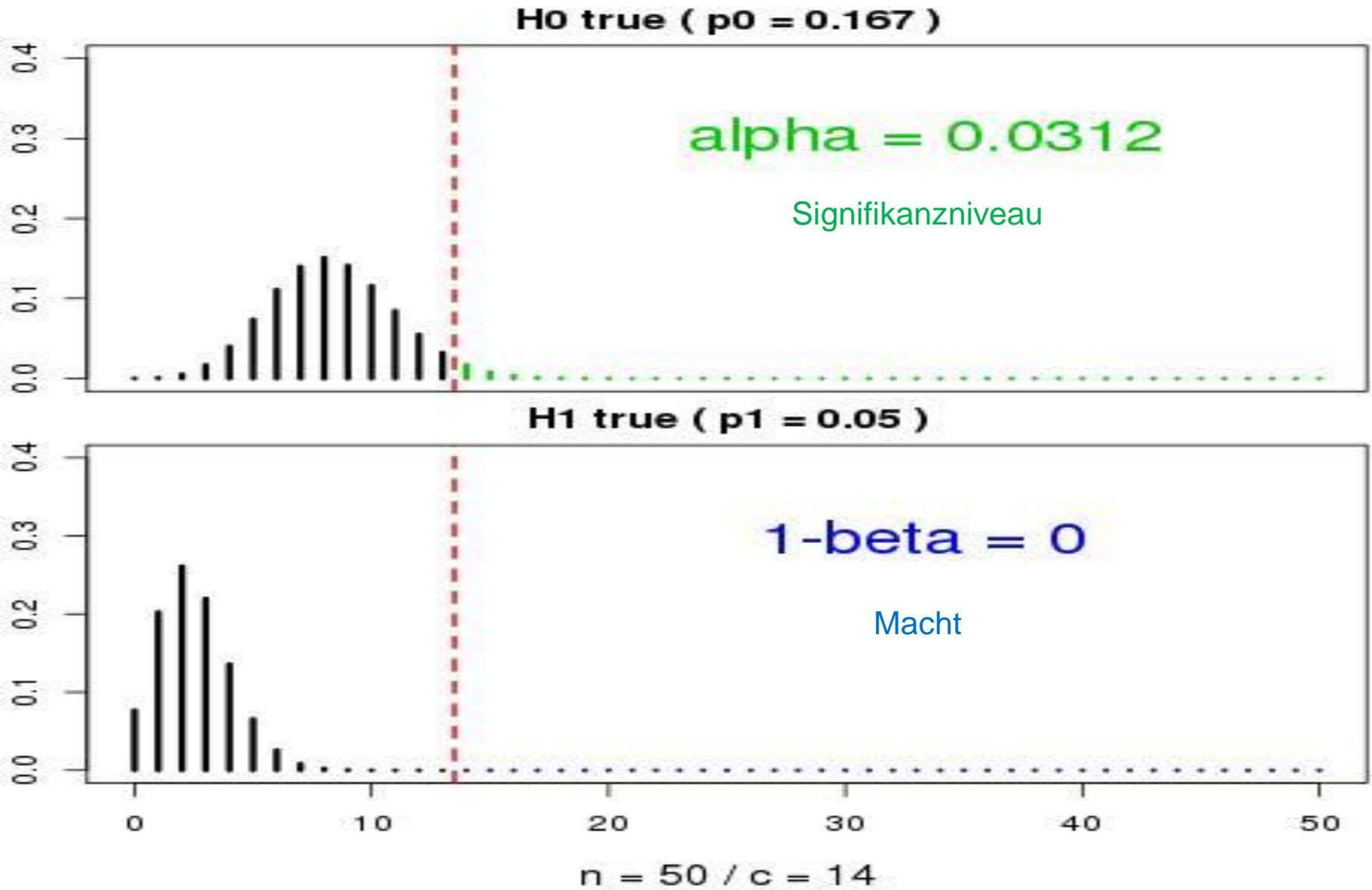
Vertreter



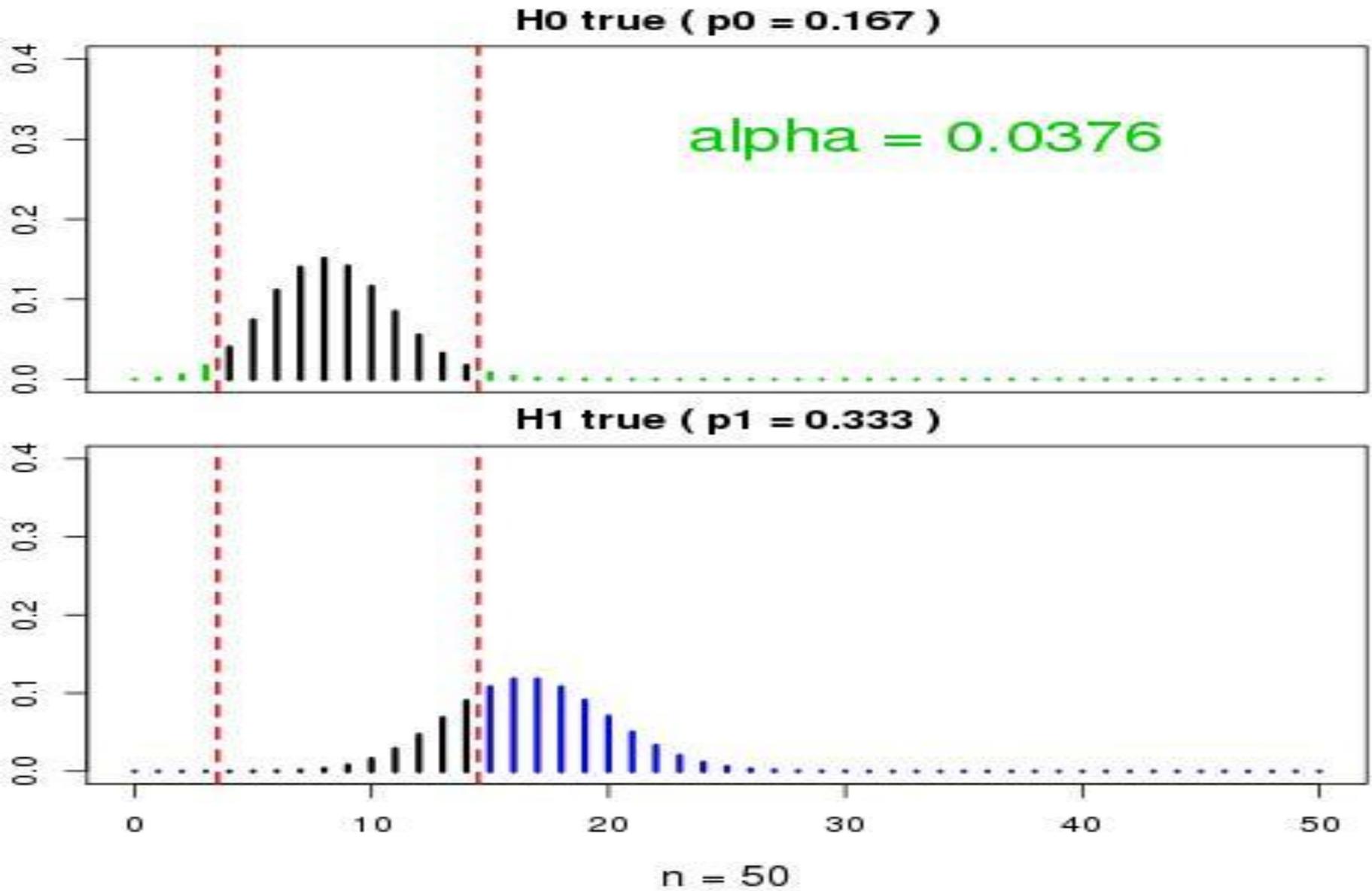
Einseitig – zu viele 6er



Einseitig – zu wenige 6er



Zweiseitig – zu viele 6er



Zweiseitig – zu viele 6er



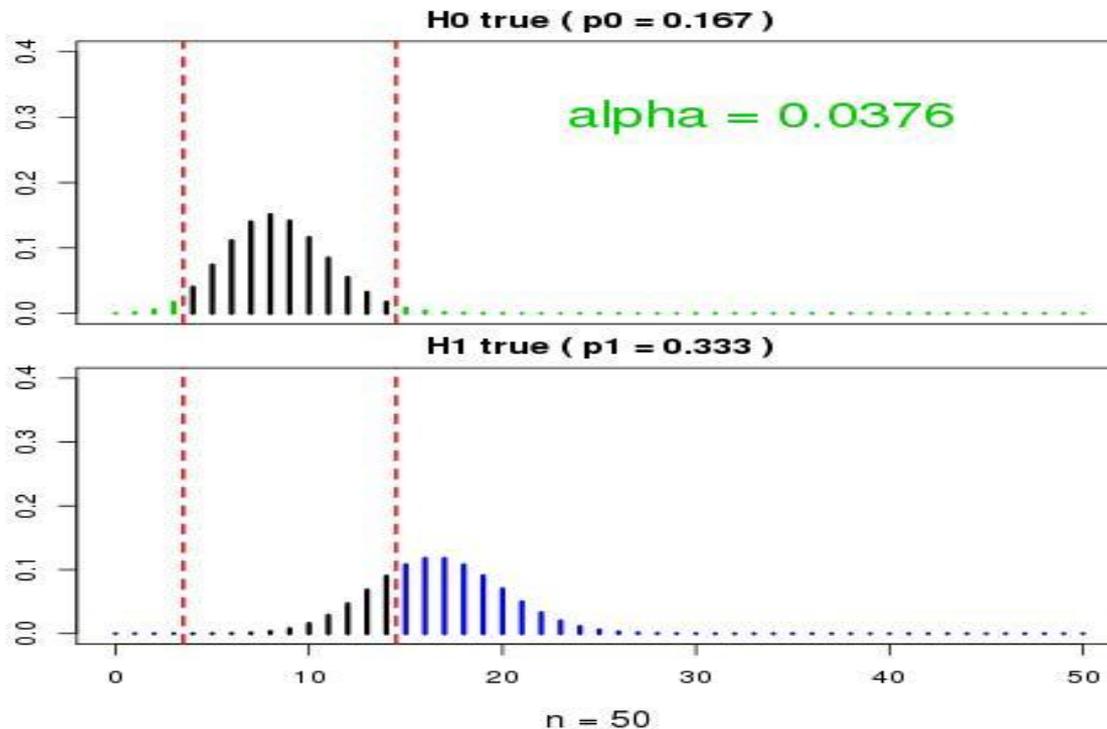
Stundenplan überblicken

Hörsäle finden

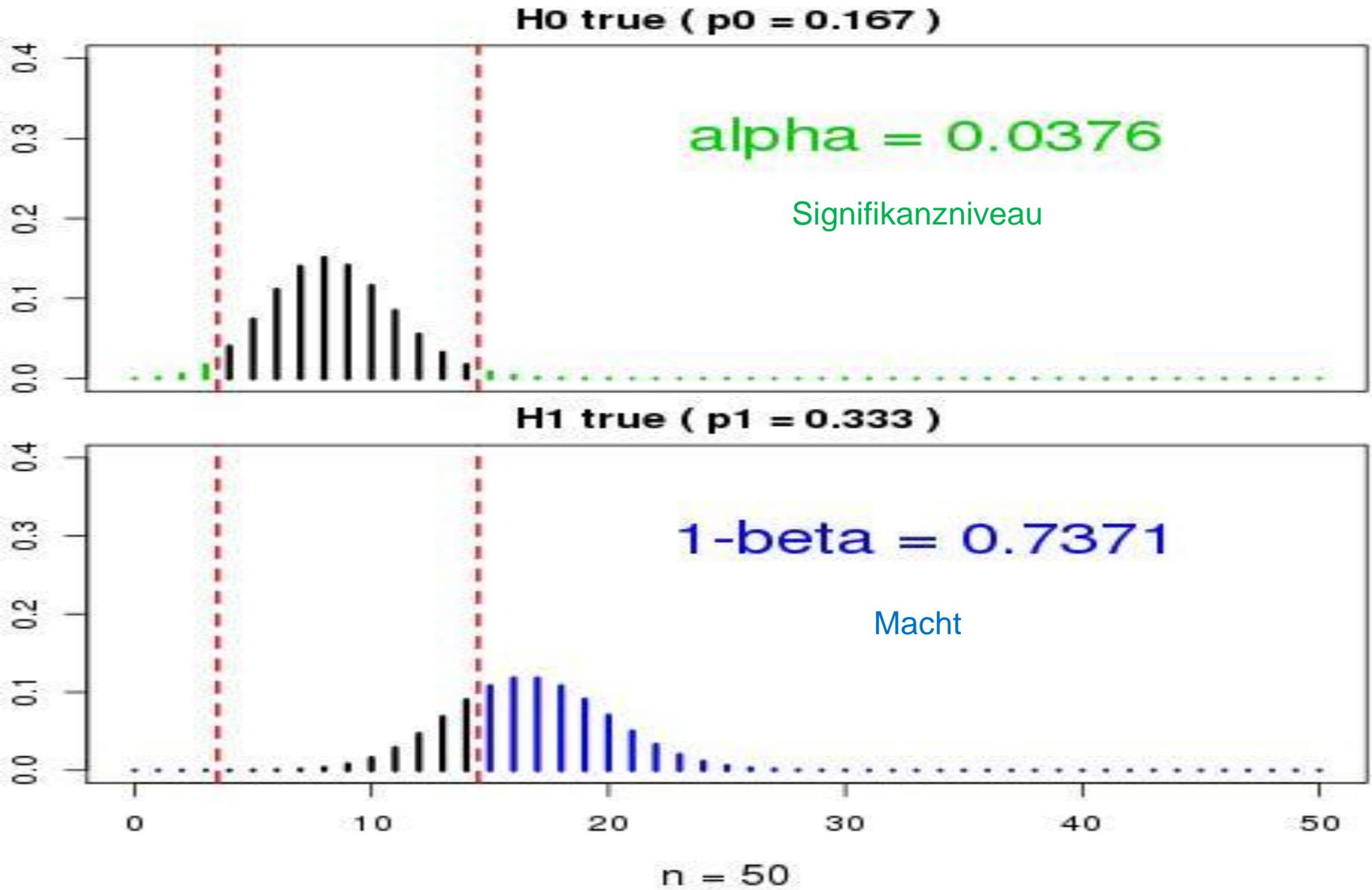
Lehrveranstaltungen interaktiv gestalten

Die Macht des zweiseitigen Tests bei gleichem Signifikanzniveau ist in diesem Beispiel

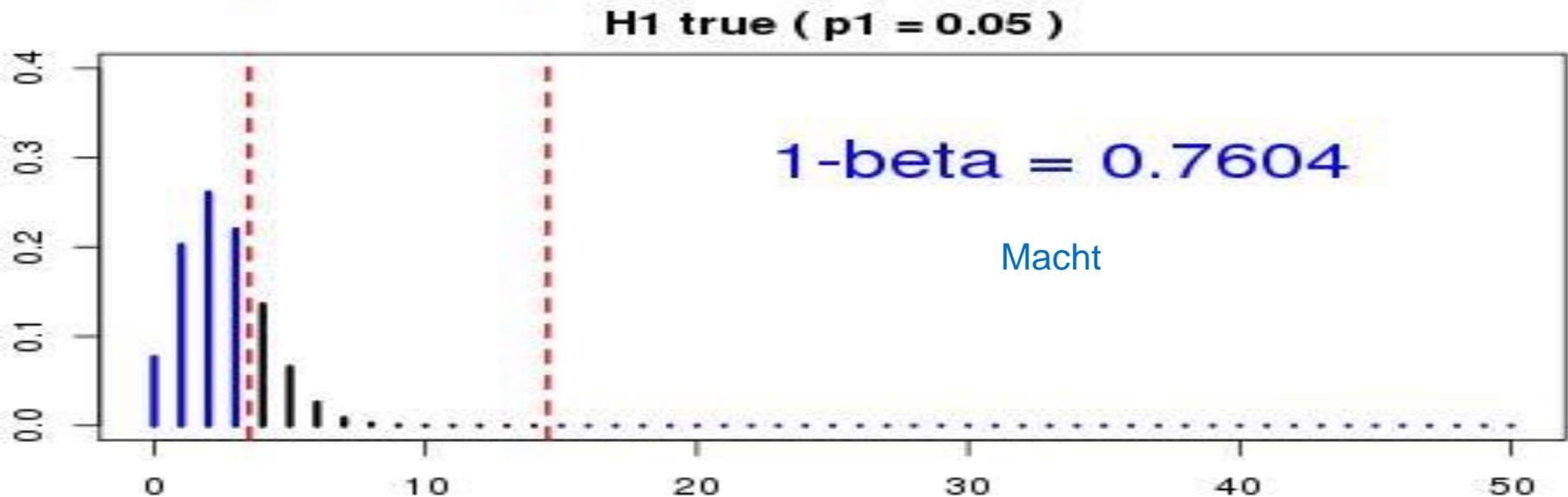
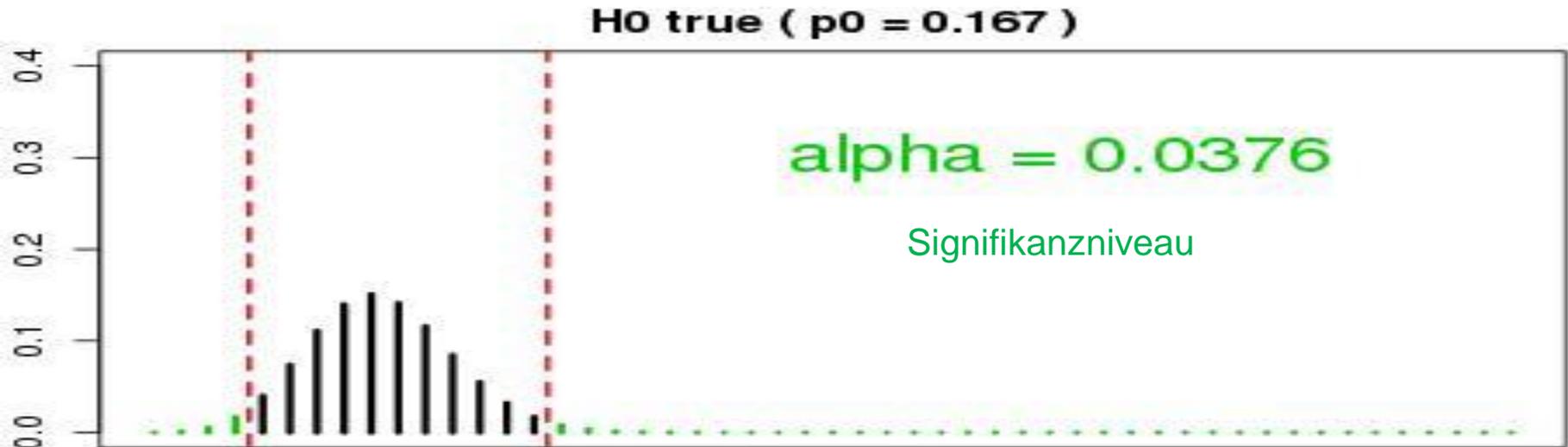
- grösser als beim einseitigen Test
- kleiner als beim einseitigen Test
- gleich wie beim einseitigen Test



Zweiseitig – zu viele 6er



Zweiseitig – zu wenige 6er



$n = 50$

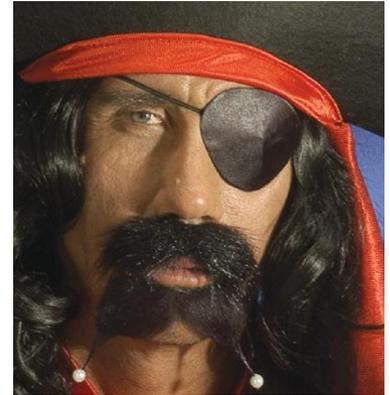
Zweiseitig vs. Einseitig

Testart ($H_0: \pi = \frac{1}{6}; \alpha = 0.05$)	Macht	
	p1=0.05	p1=0.33
Einseitig ($H_A: \pi > \frac{1}{6}$)	0.00	0.83
Zweiseitig ($H_A: \pi \neq \frac{1}{6}$)	0.76	0.74

Zweiseitig vs. Einseitig

- **Einseitig:**

- Auf eine Seite blind
- Auf andere Seite sehr grosse Sehstärke (grosse Macht)



- **Zweiseitig:**

- Sieht auf beide Seiten
- Sieht auf keiner Seite besonders gut (kleine Macht)



Der Binomialtest ganz formal:

1. Modell
2. Hypothesen
3. Teststatistik und Verteilung falls Nullhypothese stimmt
4. Signifikanzniveau
5. Verwerfungsbereich der Teststatistik
6. Testentscheid

Binomialtest 1/6: Modell

- X : Anzahl Erfolge bei n Versuchen
- $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$

Binomialtest 2/6: Hypothesen

- Nullhypothese $H_0: \pi = \pi_0$
- Alternative H_A : Drei Möglichkeiten
 - $\pi \neq \pi_0$ (zweiseitig) oder
 - $\pi > \pi_0$ (einseitig nach oben) oder
 - $\pi < \pi_0$ (einseitig nach unten)

Binomialtest 3/6: Teststatistik

- T: Anzahl Treffer bei n Versuchen
- Verteilung von T falls H_0 stimmt: $T \sim \text{Bin}(n, \pi_0)$

Brainpower !



Binomialtest 4/6: Signifikanzniveau α

- Konvention
- Meist: $\alpha = 0.05$

Binomialtest 5/6: Verwerfungsbereich für Teststatistik

Teil 1 von 3

- Form vom Verwerfungsbereich:
 - $K = [0, c_u] \cup [c_o, n]$ falls $H_A: \pi \neq \pi_0$
 - $K = [c_>, n]$ falls $H_A: \pi > \pi_0$
 - $K = [0, c_<]$ falls $H_A: \pi < \pi_0$
- Grenzen (c's) werden bestimmt, sodass folgendes gilt:
 - $P(T \leq c_u) \approx \frac{\alpha}{2}$
 - $P(T \geq c_o) \approx \frac{\alpha}{2}$
 - $P(T \geq c_>) \approx \alpha$
 - $P(T \leq c_<) \approx \alpha$

Binomialtest 5/6: Verwerfungsbereich für Teststatistik

Teil 2 von 3: Grenzen exakt

- Grenzen (c 's) werden bestimmt, sodass folgendes gilt:
 - $P(T \leq c_u) \leq \frac{\alpha}{2}$ (und c_u so gross wie möglich)
 - $P(T \geq c_o) \leq \frac{\alpha}{2}$ (und c_o so klein wie möglich)
 - $P(T \geq c_>) \leq \alpha$ (und $c_>$ so klein wie möglich)
 - $P(T \leq c_<) \leq \alpha$ (und $c_<$ so gross wie möglich)
- Bsp: $T \sim \text{Bin}(10, 0.4)$ mit $\alpha = 0.05$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(T=t)	0.006	0.04	0.12	0.21	0.25	0.20	0.11	0.04	0.01	0.002	0.0001

- Aus Tabelle:
 - $c_u = 0$
 - $c_o = 8$
 - $c_> = 8$
 - $c_< = 1$

Binomialtest 5/6: Verwerfungsbereich für Teststatistik

Teil 3 von 3: Grenzen approximativ

- Form vom Verwerfungsbereich:
 - $K = [0, c_u] \cup [c_o, n]$ falls $H_A: \pi \neq \pi_0$
 - $K = [c_>, n]$ falls $H_A: \pi > \pi_0$
 - $K = [0, c_<]$ falls $H_A: \pi < \pi_0$
- “Normalapproximation” für $\alpha = 0.05$:
 - $c_u = n\pi_0 - 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ abrunden
 - $c_o = n\pi_0 + 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ aufrunden
 - $c_> = n\pi_0 + 1.64\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ aufrunden
 - $c_< = n\pi_0 - 1.64\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ abrunden
- Approximation gut, falls n gross und π nicht nahe bei 0 oder 1 (genauere Faustregel: Siehe Skript)

Binomialtest 6/6: Testentscheid

Liegt beobachteter Wert von T in K?

- Falls ja: H_0 kann auf dem Signifikanzniveau α verworfen werden
- Falls nein: H_0 kann auf dem Signifikanzniveau α **nicht** verworfen werden

P-Wert: Beispiel

Binomialtest, $n=10$, $H_0: \pi = 0.4$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(T=t)$	0.006	0.040	0.12	0.21	0.25	0.20	0.11	0.042	0.01	0.002	0.0001

1. $H_A: \pi > 0.4$

Angenommen, $t=9$ beobachtet

$$p = P(T \geq t) = P(T = 9) + P(T = 10) \approx 0.002 + 0.0001 = 0.0021$$

2. $H_A: \pi < 0.4$

Angenommen $t=1$ beobachtet

$$p = P(T \leq t) = P(T = 0) + P(T = 1) \approx 0.006 + 0.04 = 0.046$$

3. $H_A: \pi \neq 0.4$

Angenommen $t=1$ beobachtet

$$p = P(T \in \{0,1,8,9,10\})$$

$$\approx 0.006 + 0.040 + 0.01 + 0.002 + 0.0001 = 0.0581$$

Coverage = 0.94

