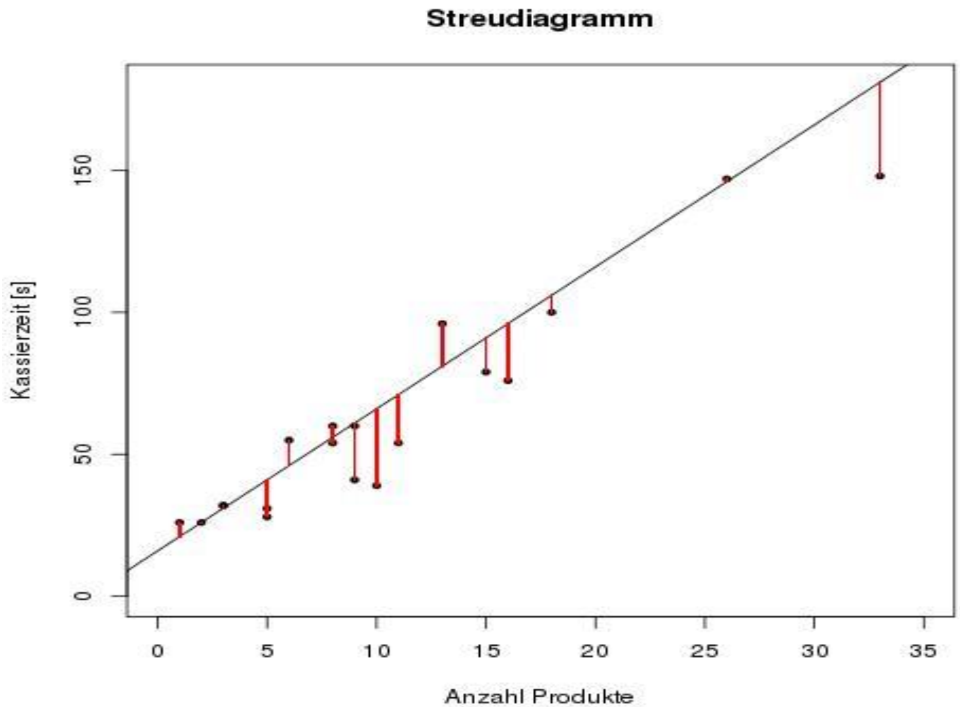
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Multiple Lineare Regression

Statistik (Biol./Pharm./HST) – FS 2014

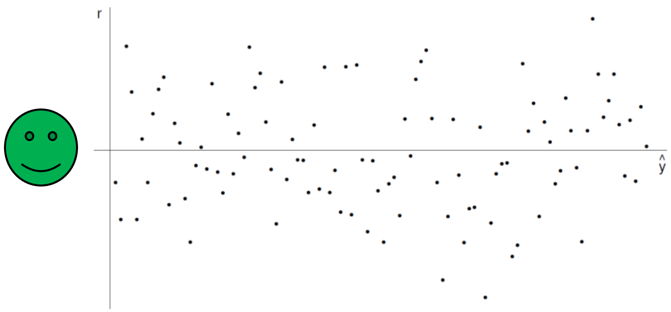
Wdh: Einfache lineare Regression

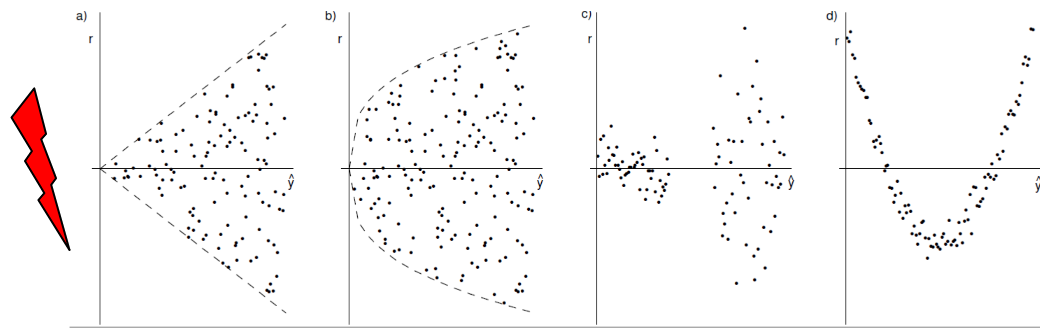
- Modell: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)\ \ i.i.d$
- Finde $\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1}$: Methode der kleinsten Quadrate
  $\widehat{\sigma^2}$ ist geschätzte Varianz der Residuen
- $\frac{\widehat{\beta}_k - \beta_k}{\widehat{s.e.}(\widehat{\beta}_k)} \sim t_{n-2}$ $\rightarrow$ t-Test: $H_0\colon \beta_k = 0,\ H_A\colon \beta_k \neq 0$
- R: Funktion ‘lm’



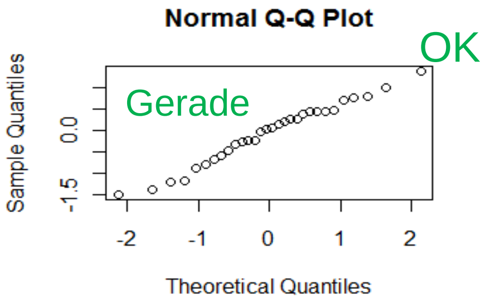
Wdh: Residuenanalyse
Sind Modellannahmen erfüllt?

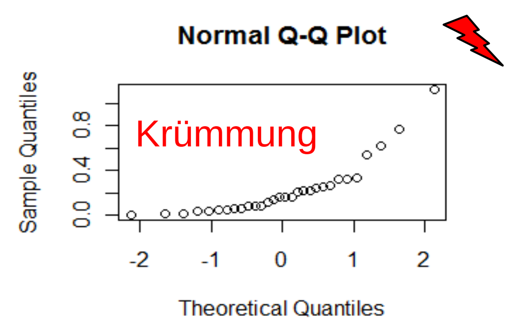
- Tukey-Anscombe Plot: Modellwert vs. Residuen (Fehlervarianz konstant, systematische Fehler)



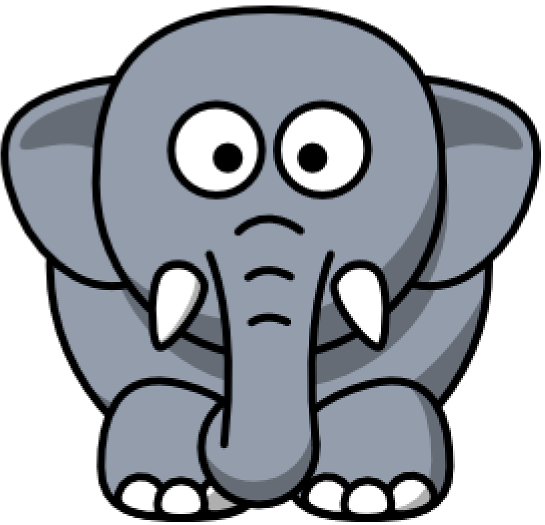


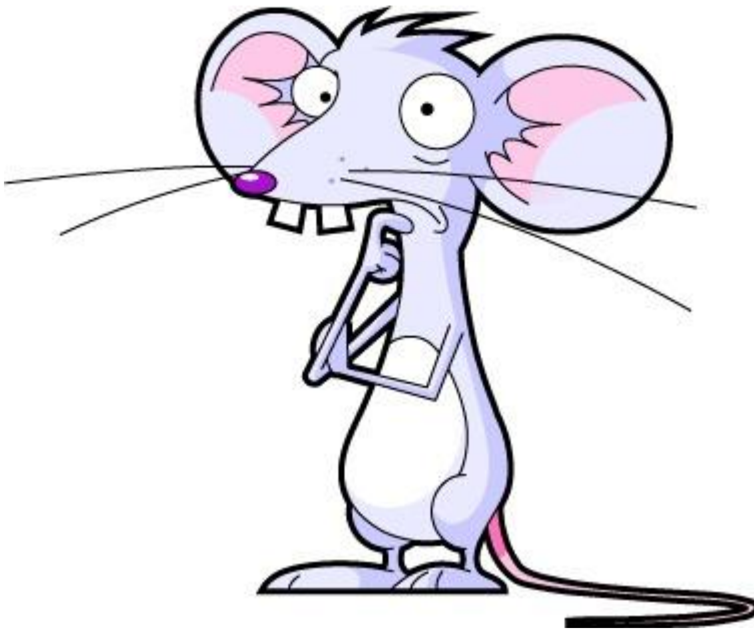
- QQ-Plot: Empirische Quantile vs. theoretische Quantile (Residuen normalverteilt)





Falls Residuenanalyse schlecht: Transformationen





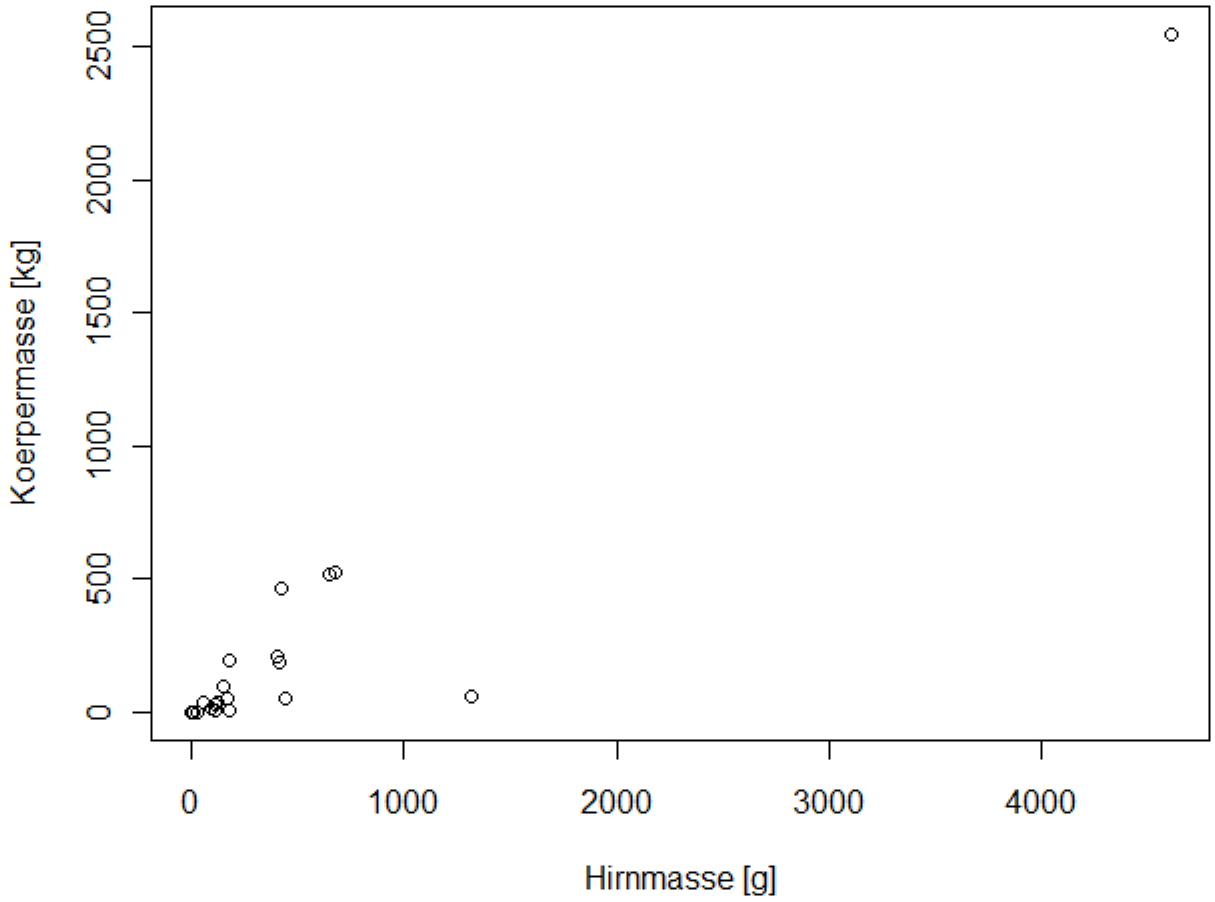
Zusammenhang:

Hirnmasse

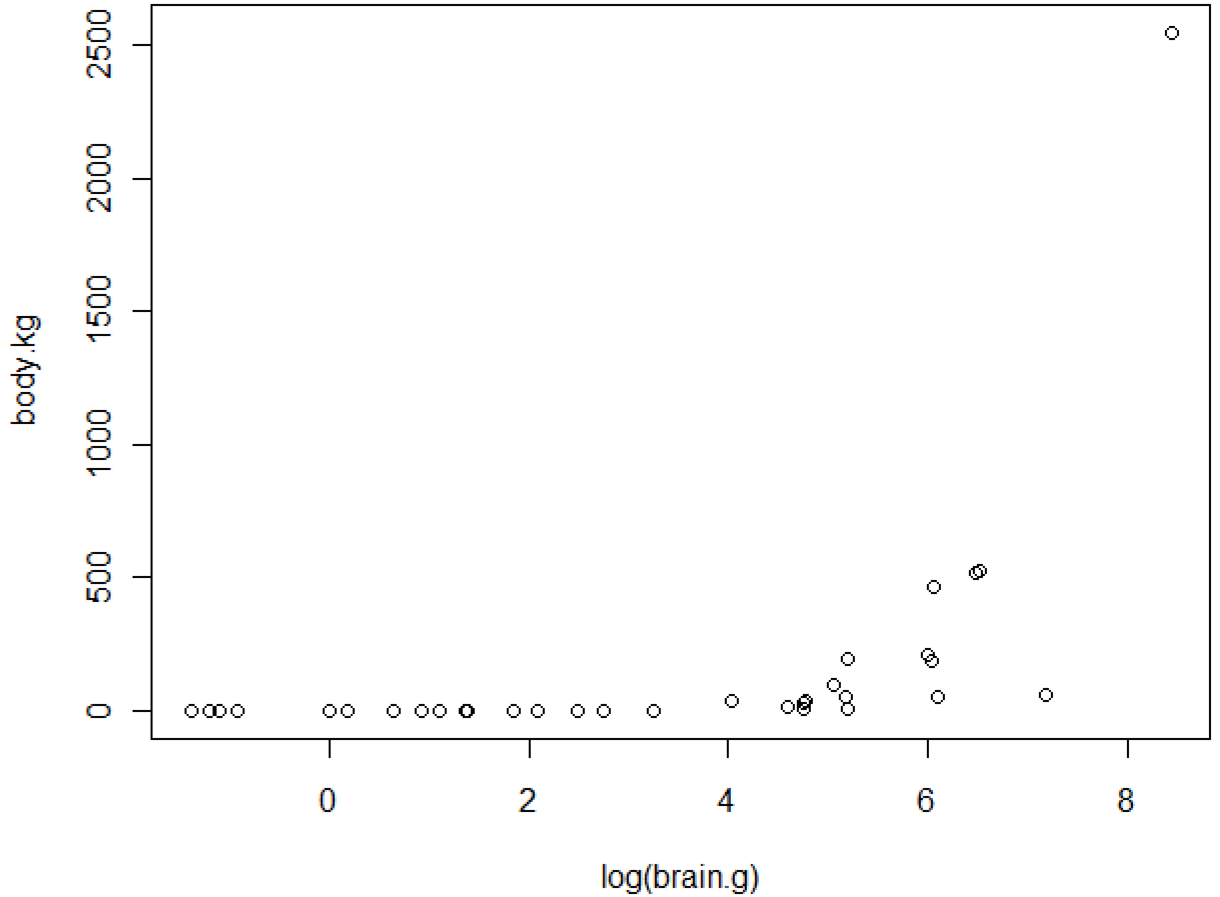
und

Körpermasse

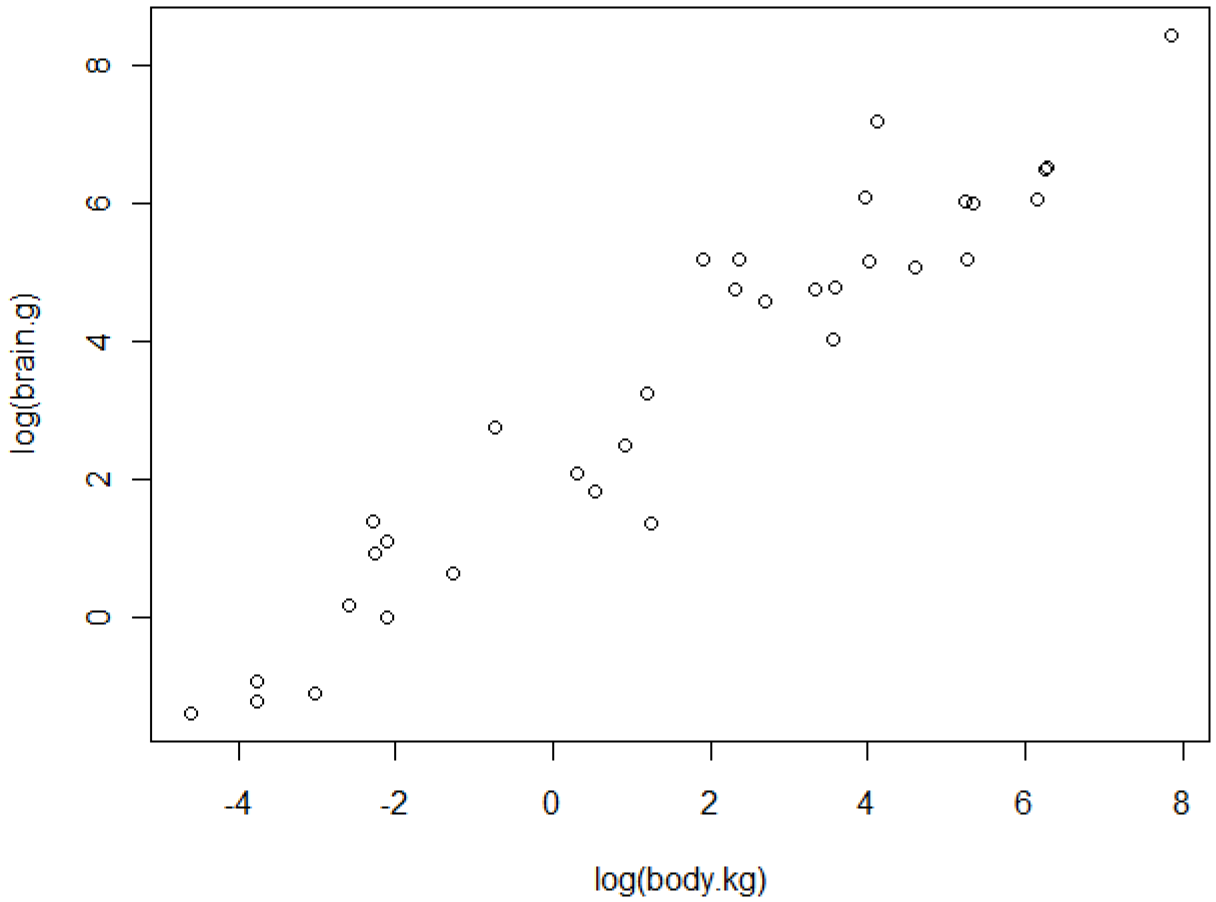
Bsp: Hirnmasse vs. Körpermasse



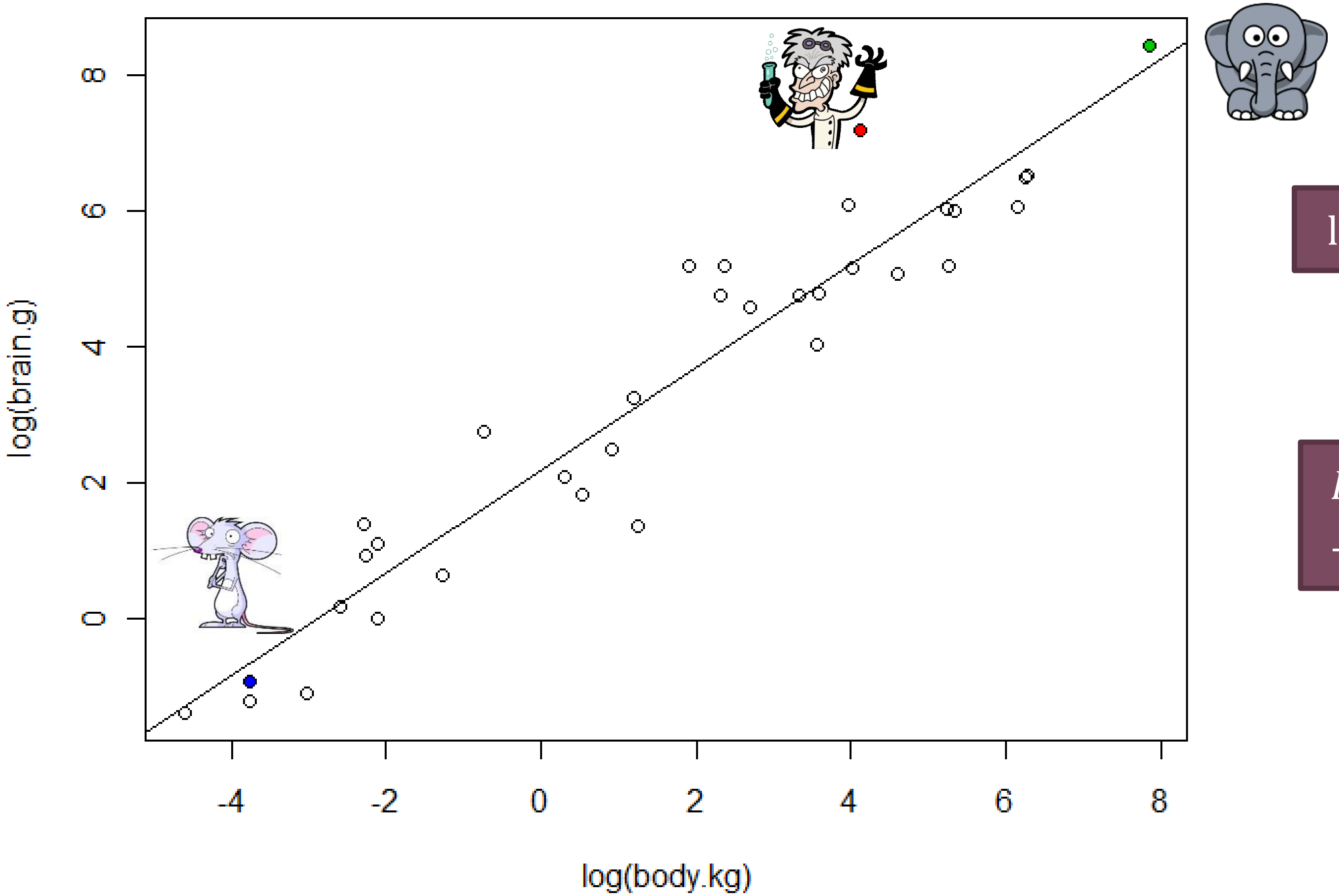
Bsp: log(Hirnmasse) vs. Körpermasse



Bsp: log(Hirnmasse) vs. log(Körpermasse)



Bsp: log(Hirnmasse) vs. log(Körpermasse)



$\log(H) = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} * \log(K)$

$H = \exp\left(\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} * \log(K)\right)$
$\rightarrow H = \hat{a} * K^{\hat{b}}$

$\widehat{\beta_0} = 2.19$ (95%-VI: [1.89; 2.49]); $\widehat{\beta_1} = 0.75$ (95%-VI: [0.67; 0.83])

$\hat{a} = \exp\left(\widehat{\beta_0}\right) = 8.94$ (95%-VI: [$\exp(1.89)$; $\exp(2.49)$] = [6.60; 12.02]
$\hat{b} = \widehat{\beta_1}$ (95%-VI: [0.67; 0.83])

Übersicht über nützliche Transformationen

- Linearer Zusammenahng:
  $y = a + bx$ (keine Transofrmation nötig)

- Exponentieller Zusammenhang:
  $$\log(y) = a + bx \rightarrow y = \exp(a) * \exp(bx)$$

- Polynomieller Zusammenhang:
  $$\log(y) = a + b \cdot \log(x) \rightarrow \mathrm{y} = \exp(\mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot \log(x))$$
  $$\rightarrow y = \exp(a) \cdot x^b$$

Multiple Lineare Regression:
Wie hängt Energie von Eiweiss, Kohlehydraten und Fett ab?

Multiple Lineare Regression: Interpretation

- Energie (E), Eiweiss (EW), Kohlehydrate (K), Fett (F)
- Modell:

$$E[kcal] = \beta_0 + \beta_1 EW[g] + \beta_2 K[g] + \beta_3 F[g] + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

Was bedeutet es, wenn in diesem Modell $\beta_3 = 8$?

A: Wenn ein Nahrungsmittel ein Gramm mehr Fett als ein anderes hat, enthält es im Schnitt 8 kcal mehr Energie.

B: Wenn ein Nahrungsmittel ein Gramm mehr Fett als ein anderes hat und gleich viel Eiweiss und Kohlehydrate enthält,
enthält es im Schnitt 8 kcal mehr Energie.

Einfache oder Multiple Regression

(Gilt für alle GLMs; hier am Bsp der linearen Regression)

- Einfache Regression:
  “Totaler Effekt”
  y ~ x → “Wenn sich x um eine Einheit erhöht, erhöht sich y um β_1”
- Multiple Regression
  “Bereinigter Effekt”
  y ~ x1 + x2 → “Wenn sich x1 um eine Einheit erhöht und x2 konstant bleibt, erhöht sich y um β_1.

- Kein “richtig” oder “falsch”; eher zwei verschiedene Sichtweisen auf das gleiche Problem

Vorteil von Multipler Regression

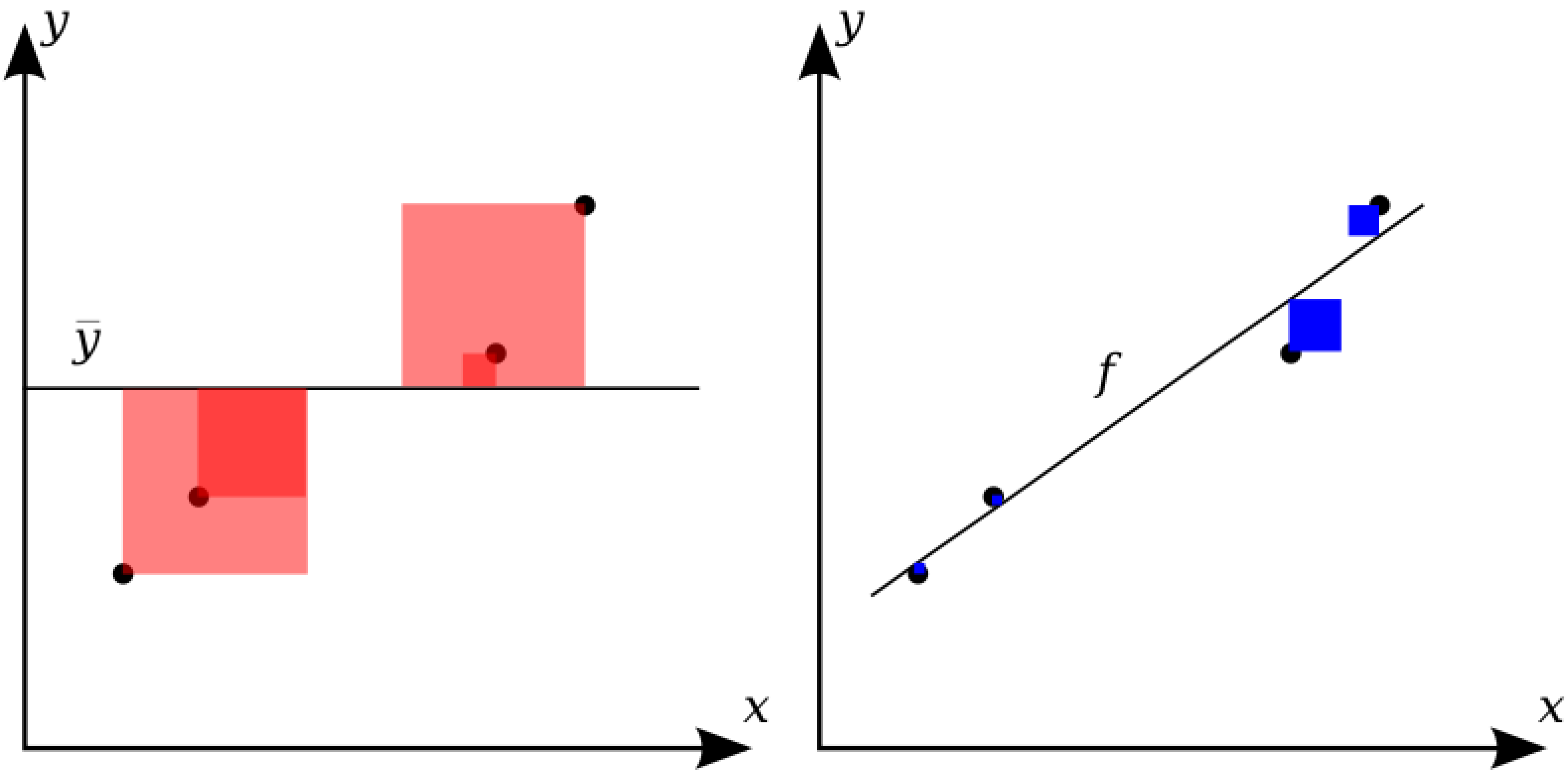
- Andere Einflüsse werden ausgeschaltet

Bsp: Diskriminierung

- Einfache Regression:
  Zulassung ~ Geschlecht
- Multiple Regression:
  Zulassung ~ Geschlecht + Job

  Berühmtes Beispiel: Simpson's Paradox

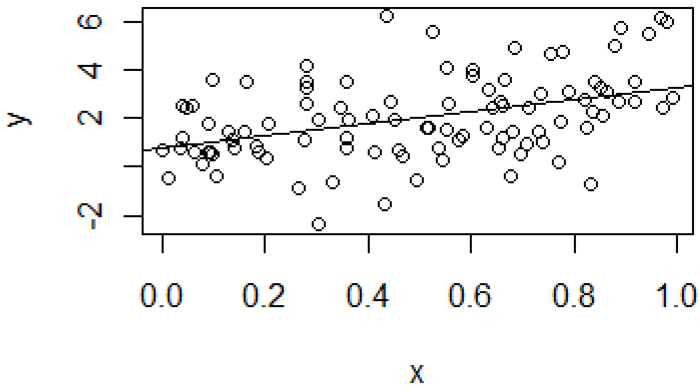
Bestimmtheitsmass R^2



$$R^2 = 1 - \frac{SS_{err}}{SS_{tot}}$$

R^2: "Wie nahe liegen Punkte auf der Geraden?"
(im Vergleich zur ursprünglichen Streuung der y-Werte)

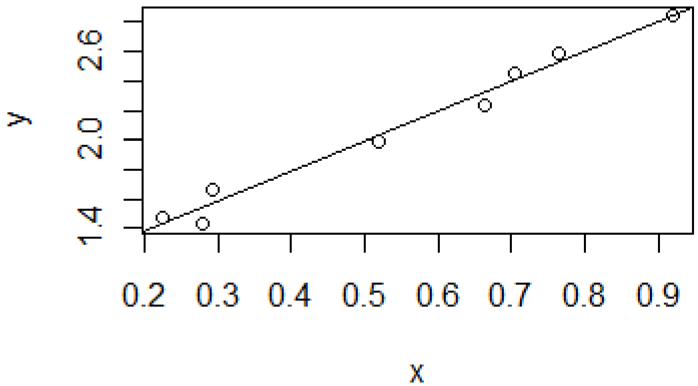
Signifikanz vs. Relevanz



Signifikant, aber evtl. nicht relevant

$H_0: \beta_1 = 0 \ \rightarrow p = 0.00008$

$R^2 = 0.15 \ oder \ |\widehat{\beta_1}| \ sehr \ "klein"$



Signifikant und wohl auch relevant (?)

$H_0: \beta_1 = 0 \ \rightarrow p = 0.00002$

$R^2 = 0.98 \ oder \ |\widehat{\beta_1}| \ "gross"$

Statistik: Entscheidet **Signifikanz**

Wissenschaft: Entscheidet **Relevanz**

(je nach Fach: Unterschiedliche Werte von R^2 gefordert)

Energiegehalt von 20 Lebensmitteln

Daten (pro 100 g)

Name	kcal	gE	gK	gF
Butter	729	0.5	0.5	82.0
Laetta	370	0.0	4.0	39.0
Mozzarella	257	19.0	1.0	20.0
Cantadou	323	7.0	3.0	32.0
Lc1	105	3.5	15.5	3.0
Emmi	130	4.0	16.0	5.5
Quark	65	12.0	2.5	0.1
LightKaese	249	29.0	2.0	14.0
Banane	93	1.0	22.0	0.0
Zucchini	19	1.6	3.3	0.4
Tomate	17	1.0	2.6	0.2
Kartoffel	86	2.0	19.0	0.1
Brot	282	11.0	53.0	1.5
CremeSchnitte	311	4.5	48.0	11.0
Pizza	227	13.0	31.0	5.0
Schoko	569	7.0	46.0	40.0
Chips	517	7.0	51.0	32.0
Spaghetti	350	12.0	72.2	1.5
Reis	358	5.0	83.0	0.5
Stocki	320	9.0	70.0	1.0

Multiple Lineare Regression

```
lm(formula = kcal ~ gE + gK + gF, data = dat)
```

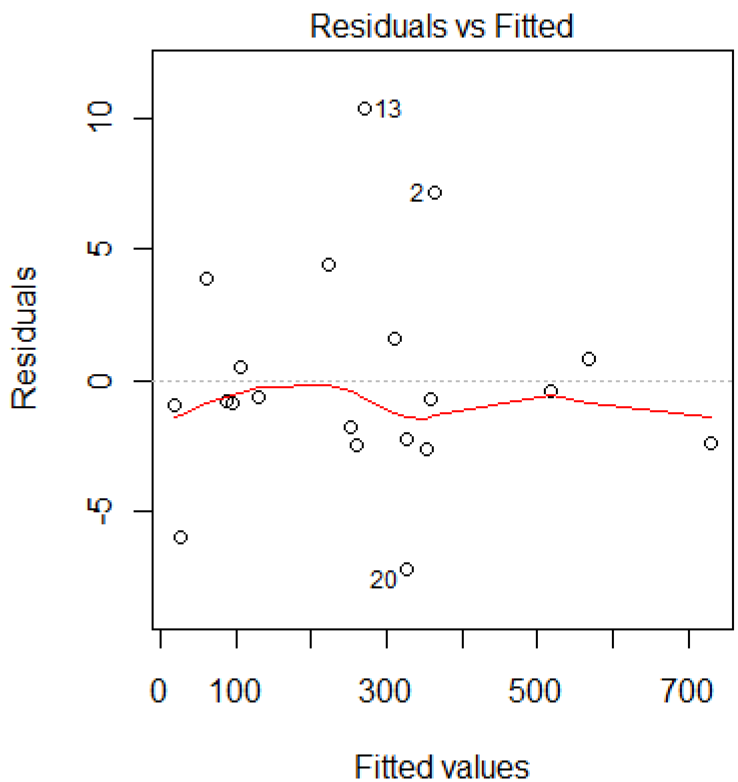
Ein Lebensmittel, das ein Gramm mehr Fett
aber gleich viel Eiweis und Kohlenhydrate enthält,
enthält im Schnitt 8.8 kcal (95%-VI: [7.8; 9.8]) mehr Energie.

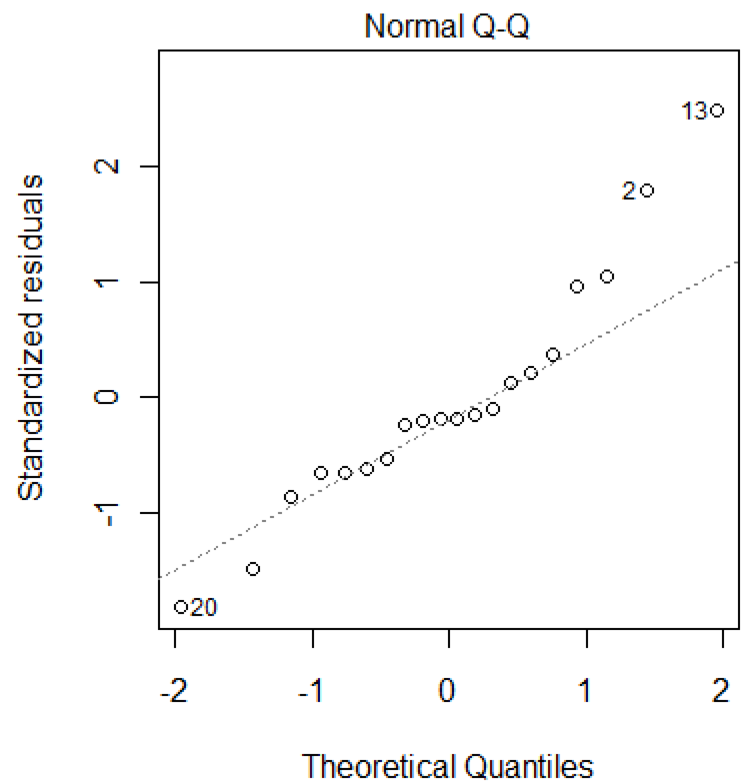
```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.70736    2.10299   0.812    0.429
gE           4.04087    0.14280  28.298  4.3e-15
gK           4.00415    0.03838 104.330  < 2e-16
gF           8.84937    0.05025 176.115  < 2e-16

Multiple R-squared: 0.9995
```

Die Punkte liegen äusserst genau
auf der geschätzten Geraden.

(verglichen mit der ursprünglichen Streuung
der Energiewerte)

Residuenanalyse





Im Allgemeinen sind die Modellannahmen erfüllt. Allerdings fallen Beobachtungen 2 (Lätta) und 13 (Brot) etwas aus dem Rahmen (5-10 kcal mehr als vorhergesagt).