

## Musterlösung zu Serie 10

1. Die  $X_i, i = 1, 2, \dots, 6$ , sind Poisson-verteilt mit je demselben Parameter  $\lambda_i = \lambda$  und unabhängig. Die ZV  $X = \sum_{i=1}^6 X_i$  ist also Poissonverteilt mit Parameter  $6\lambda$ .

a) Mit der Faustregel wird für  $X = 2 + 3 + 1 + 5 + 6 + 3 = 20$  das 95%-Vertrauensintervall für  $6\lambda$  gleich  $20 \pm 2\sqrt{20} = [11.06, 28.94]$ , also ist das 95%-Vertrauensintervall für  $\lambda = [c_1/6, c_2/6] = [1.84, 4.82]$ .

b) Nullhypothese  $H_0 : X_i$  i.i.d.  $Poi(\lambda_0 = 6)$

Alternative  $H_A : \lambda_0 < 6$  (Abnahme)

Teststatistik:  $X = \sum_{i=1}^6 X_i$ , unter  $H_0$  gilt:  $X \sim Poi(36)$

Kritischer Wert des einseitigen 2.5%-Niveau-Testes:  $36 - 2\sqrt{36} = 24$ .

Kritischer Bereich  $\mathcal{K} = \{X < 24\}$ .

$X = 20 \in \mathcal{K}$ . Wir können sagen, dass eine signifikante Abnahme der Substanz stattgefunden hat.

Andere Lösungsweg:

Da das einseitige 97.5%-Vertrauensintervall  $[0, 4.82]$  beträgt und 6 nicht in diesem liegt, muss die Nullhypothese  $\lambda_0 = 6$  des einseitigen 2.5%-Niveau-Testes verworfen werden.

2. Sei  $X$  die Anzahl kranker Tauben zwischen den  $n = 50$  geschossener Tauben.

a) Jede Taube ist, unabhängig von den anderen, mit Wahrscheinlichkeit  $p$  krank.

Schätzung von  $p$ :  $\hat{p} = \frac{X}{50} = \frac{12}{50} = 0.24$ .

Das Abschussexperiment lässt sich durch die Binomialverteilung beschreiben:

$X \sim \text{Bin}(n = 50, p)$ .

b) In a) hatten wir  $\hat{p} = \frac{X}{n}$ . Daraus folgt

$$\text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\text{Var}(X)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

und somit

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Wir erhalten die empirische Standardabweichung von  $\hat{p}$ , wenn wir  $p$  durch  $\hat{p} = 0.24$  ersetzen:  
 $\hat{\sigma}_{\hat{p}} = 0.06$ .

c) Die Fragestellung führt zu folgendem Test:

$H_0 : X \sim \text{Bin}(50, p_0 = 0.4)$

$H_A : X \sim \text{Bin}(50, p)$ , mit  $p \neq p_0 = 0.4$

95%-Vertrauensintervall (mit Normalapproximation):  $\hat{p} \pm 1.96 \cdot \hat{\sigma}_{\hat{p}} = [0.122, 0.358]$ .

Entscheidung:  $H_0$  verwerfen, da  $0.4 \notin [0.122, 0.358]$ . Es ist also nicht sinnvoll, dem Gerücht zu glauben (auf dem 5%-Niveau).

d) Man kann daraus schliessen, dass die exakten Grenzen des 99%-Vertrauensintervall für  $p$  sind:  $[0.105, 0.425]$ . Die Nullhypothese wird somit auf dem 1%-Niveau beibehalten.

3. a) Es handelt sich um unverbundene (ungepaarte) Stichproben; es existiert keine gemeinsame Beobachtungseinheit.

*Bemerkung:* Man könnte von den beiden Pflanzengruppen auch unterschiedlich viele nehmen (z.B. 10 geschnittene Pflanzen, 12 Pflanzen mit Wurzeln). Unterschiedliche Anzahlen in 2 Gruppen sind nur bei unverbundenen Stichproben möglich!

## b) 2-Stichproben-t-Test

$X_i$ :  $i$ -ter Wert der geschnittenen Pflanzen,  $i = 1, \dots, n = 10$

$Y_j$ :  $j$ -ter Wert der Pflanzen mit Wurzeln,  $j = 1, \dots, m = 10$

Modellannahmen:  $X_i \text{ iid } \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $Y_j \text{ iid } \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$ ,  
 $X_i, Y_j$  unabhängig für alle  $i, j$

Nullhypothese  $H_0$ :  $\mu_1 = \mu_2$

Alternative  $H_A$ :  $\mu_1 \neq \mu_2$

Teststatistik:  $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{pool} \sqrt{1/n + 1/m}}$

$$S_{pool}^2 = \frac{1}{n+m-2} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2 \right)$$

Unter  $H_0$  gilt:  $T \sim t_{n+m-2}$ , also hier  $T \sim t_{18}$

Verwerfungsbereich: Tabelle:  $t_{18,0.975} = 2.1$  (Test zweiseitig auf 5%-Niveau)

somit:  $\mathcal{K} = \{|T| > t_{18,0.975}\} = \{|T| > 2.1\}$

Wert der Teststatistik:  $\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = 46.7$

$$\bar{Y} = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} Y_j = 36.5$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 1116.9 (= 10s_x^2)$$

$$\sum_{j=1}^{10} (Y_j - \bar{Y})^2 = 374.4 (= 10s_y^2)$$

$$T = \frac{46.7 - 36.5}{\sqrt{\frac{2}{10} \frac{1}{18} (1116.9 + 374.4)}} = \frac{10.2}{4.0706} = 2.51$$

Entscheidung: da  $T \in \mathcal{K}$ , wird  $H_0$  auf dem 5%-Signifikanzniveau durch den 2-Stichproben-t-Test verworfen.

- c) Der P-Wert des Wilcoxon-Rangsummen-Test ist gleich 0.0039. Die Nullhypothese  $H_0$  wird sogar auf dem 0.5%-Signifikanzniveau verworfen. Der P-Wert des 2-Stichproben-t-Tests beträgt 0.022. Auf dem 5%-Niveau wird man die Nullhypothese  $H_0$  verwerfen, nicht aber auf dem 1%-Niveau. Der auffällige Wert 18 in der ersten Stichprobe (siehe Normal QQ-Plot geschnittener Pflanzen) könnte ein Abschreibfehler oder ein grober Fehler sein. Diesem Wert sollte man unbedingt nachgehen (zurück in die Protokolle!). Wir entfernen diesen Wert probeweise und führen nochmals ein 2-Stichproben-t-Test mit  $n = 9$  und  $m = 10$  durch: wir erhalten den P-Wert = 0.00011. Jetzt wird  $H_0$  auch auf dem 1%-Niveau deutlich verworfen. Der t-Test reagiert sehr empfindlich auf einzelne Ausreisser. Weil die Annahme der Normalverteilung durch die zwei Normal QQ-Plots nicht deutlicherweise bestätigt werden kann, ist es besser hier den Wilcoxon-Test anzuwenden.

Quelle: Chatfield (1990), "Problem Solving: A Statistician's Guide", Exercise B1 p. 93 Broad bean plants mit Kommentar p. 101