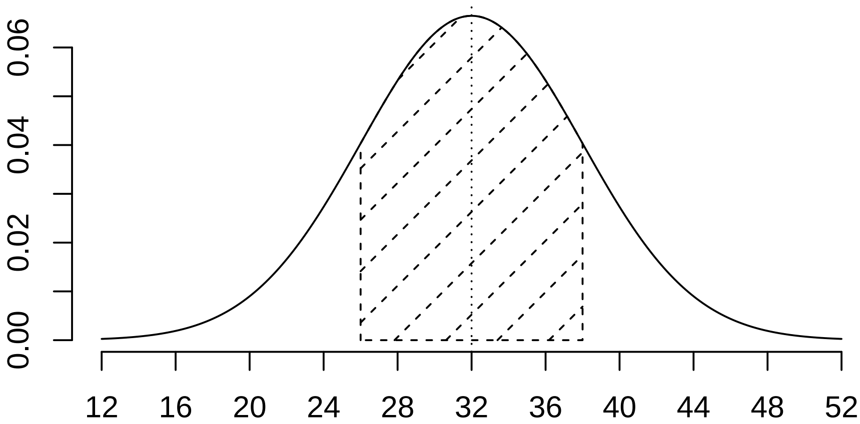
Musterlösung zu Serie 6

1. a) Skizze:



b) X bezeichne den Bleigehalt. Es gilt:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \qquad \text{mit } \mu = 32 \text{ und } \sigma^2 = 6^2.$$

Ohne Computer geht man aus praktischen Gründen (Tabelle!) normalerweise zur standardisierten Zufallsvariablen $Z = (X - \mu)/\sigma$ über. Es gilt: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\mathrm{P}\left[X \leq 40\right] = \mathrm{P}\left[Z \leq \frac{40 - 32}{6}\right] = \mathrm{P}\left[Z \leq 1.33\right] = \Phi(1.33) = 0.9082$$

Mit R kann die Wahrscheinlichkeit direkt (ohne Transformation) berechnet werden:

```
> pnorm(40, mean=32, sd=6)
[1] 0.9087888
```

Die kleine Differenz zur Zahl welche "von Hand" berechnet wurde beruht auf einem Rundungsfehler:

```
> pnorm(1.33, mean=0, sd=1)        # == pnorm(1.33)
[1] 0.9082409
> pnorm((40-32)/6, mean=0, sd=1)  # == pnorm((40-32)/6)
[1] 0.9087888
```

c) $\mathrm{P}\left[X \leq 27\right] = \mathrm{P}\left[Z \leq -0.83\right] = \Phi(-0.83) = 1 - \Phi(0.83) = 0.2033$

d) $\mathrm{P}\left[X \leq c\right] = 0.975 = \mathrm{P}\left[Z \leq \frac{c-32}{6}\right] = \Phi(\frac{c-32}{6})$
Mit Hilfe der Tabelle findet man $\Phi(1.96) = 0.975$. Also muss gelten:

$$\frac{c - 32}{6} = 1.96 \text{ und deshalb } c = 32 + 1.96 * 6 = 43.76$$

Mit R kann man die Zahl wie folgt berechnen:

```
> qnorm(0.975,mean=32, sd=6)
[1] 43.75978
```

e) Aus der Tabelle: $\Phi(1.28) = 0.9$ und $\Phi(-1.28) = 1 - 0.9 = 0.1$. Somit $c = 32 - 1.28 * 6 = 24.31$

f) $\Phi(1) - \Phi(-1) = 2 * \Phi(1) - 1 = 2 * 0.8413 - 1 = 0.6826$

2. **a)** Wir betrachten für die i-te Person die Zufallsvariable X_i. Es sei $X_i = 1$ falls die Person etwas kauft und sonst $X_i = 0$. Gemäss Aufgabenstellung gilt

$$\mathrm{P}\left[X_i = 1\right] = 0.3.$$

Mit Y bezeichnen wir die Anzahl aller Einkäufe, d.h.

$$Y = \sum_{i=1}^{10} X_i.$$

Daher gilt also $Y \sim \mathrm{Bin}\,(10, 0.3)$.

b) Keine Person kauft etwas:

$$\mathrm{P}\left[Y = 0\right] = (1 - 0.3)^{10} = 0.7^{10} \approx 0.028.$$

Mindestens 2 Personen kaufen etwas:

$$\mathrm{P}\left[Y \geq 2\right] = 1 - \mathrm{P}\left[Y < 2\right] = 1 - \mathrm{P}\left[Y = 0\right] - \mathrm{P}\left[Y = 1\right]$$

Es gilt: $\mathrm{P}\left[Y = 1\right] = 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 \approx 0.121$. Somit:

$$\mathrm{P}\left[Y \geq 2\right] \approx 1 - 0.028 - 0.121 \approx 0.85.$$

c) Approximation durch Normalverteilung:

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right),$$

wobei $\mu = 200 \cdot 0.3 = 60$, $\sigma^2 = 200 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 42$.
Durch standardisieren erhalten wir

$$\mathrm{P}\left[50 \leq Y \leq 60\right] = \mathrm{P}\left[-1.54 \leq Z \leq 0\right] = \Phi(0) - \Phi(-1.54) = 0.4382,$$

wobei verwendet wurde, dass $\Phi(-1.54) = 1 - \Phi(1.54) = 1 - 0.9382 = 0.0618$ (siehe Tabelle).