Übung 9

1. Spieltheorie und Statistik

Die einfachsten Spiele, die in der Spieltheorie betrachtet werden, sind die "Zwei-Spieler-Nullsummenspiele". Dabei hat man 2 Spieler, denen die Mengen $\mathcal{D}_1$ bzw. $\mathcal{D}_2$ der möglichen Strategien zur Verfügung stehen. Wenn Spieler 1 Strategie $\alpha \in \mathcal{D}_1$ wählt und Spieler 2 Strategie $d \in \mathcal{D}_2$, dann bezahlt Spieler 2 an Spieler 1 den Betrag $r(\alpha, d)$.

Ein einfaches Beispiel ist das 2-Finger-Morra Spiel: Sara und Nina spielen gegeneinander. Auf "Jetzt!" müssen beide einen oder zwei Finger zeigen. Zeigen beide die gleiche Anzahl Finger, so erhält Sara von Nina die totale Anzahl gezeigter Finger in Franken (also 2 oder 4), sonst erhält Nina von Sara 3 Franken.

Ein statistisches Entscheidungsproblem kann man (aus Bayesianischer Sicht) als Spiel Natur gegen Statistiker auffassen. Die Natur wählt einen Parameter θ gemäss Verteilung α und der Statistiker ein Verfahren d. Der Statistiker erleidet dann den mittleren Verlust $r(\alpha, d) = \int \int L(\theta, T(x))\, P_\theta(dx)\, \alpha(d\theta)$, also das Bayesrisiko.

a) Zeige, dass für beliebige Strategiemengen und Auszahlungsfunktionen gilt

$$\inf_{d \in \mathcal{D}_2} \sup_{\alpha \in \mathcal{D}_1} r(\alpha, d) \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{D}_1} \inf_{d \in \mathcal{D}_2} r(\alpha, d)\,.$$

b) (α^*, d^*) heisst ein *Sattelpunkt*, falls $r(\alpha, d^*) \leq r(\alpha^*, d^*) \leq r(\alpha^*, d)\ \forall \alpha, d$.
Zeige: Wenn ein Sattelpunkt (α^*, d^*) existiert, dann gilt

$$\inf_{d \in \mathcal{D}_2} \sup_{\alpha \in \mathcal{D}_1} r(\alpha, d) = \sup_{\alpha \in \mathcal{D}_1} \inf_{d \in \mathcal{D}_2} r(\alpha, d) = r(\alpha^*, d^*)\,.$$

Interpretation: Ein Sattelpunkt ist eine Situation, in der jeder der beiden Spieler sich automatisch verschlechtert, wenn er von seiner Strategie abweicht, sofern der Gegner seiner Strategie treu bleibt.

c) Sei d^* ein Bayes-Verfahren zur a priori Verteilung α^* und $\theta \to R(\theta, d^*)$ konstant. Zeige, dass dann (α^*, d^*) ein Sattelpunkt ist. α^* heisst auch ungünstigste a priori Verteilung. Begründe diese Bezeichnung.

d) Bestimme die Auszahlungsmatrix im 2-Finger-Morra Spiel und zeige, dass es (für feste Strategien) keinen Sattelpunkt gibt (d.h. in Teilaufgabe a) gilt $>$).

e) Wir wollen nun auch randomisierte Strategien zulassen: beide Spielerinnen entscheiden zufällig, ob sie einen oder zwei Finger zeigen, und zwar mit Wahrscheinlichkeiten p_N und $1 - p_N$ resp. p_S und $1 - p_S$. Die Auszahlung r wird dann entsprechend gemittelt. Zeige:

1. Es existiert für beide Spielerinnen je eine Strategie so, dass das Risiko konstant ist bei allen Strategien der Gegnerin.
2. Dieses Strategienpaar definiert einen Sattelpunkt.

f) An wessen Stelle würdest Du spielen, wenn Du wählen dürftest?

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ mit $\theta \in [0, \infty)$ (wenn z.B. von der Anlage des Experimentes klar ist, dass der wahre Wert positiv ist, die gemessenen Werte aber auch negativ sein können). Als Verlust wählen wir wie üblich $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$.

a) Zeige, dass $T(X) = X$ unzulässig ist, indem Du die Vorinformation $\theta \geq 0$ benutzt, um einen überall besseren Schätzer T' zu konstruieren.

b) Zeige, dass der in a) gefundene Schätzer T' das gleiche maximale Risiko hat wie T.

Abgabe: Freitag, 13. Januar

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.