Übung 8

1. Betrachte das 2-Stichproben-Modell

$$\begin{aligned} U_i &= \mu + \epsilon_i\,, \quad i = 1, \ldots, n, \\ V_j &= \nu + \eta_j\,, \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

wobei die gemeinsame Verteilung von $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ als bekannt vorausgesetzt wird. Der unbekannte Parameter ist also $\theta = (\mu, \nu)$, und wir interessieren uns für $g(\theta) = \mu - \nu$. Der Verlust sei $L(\theta, a) = L(a - g(\theta)) = (a - g(\theta))^2$.

a) Definiere Äquivarianz für einen Schätzer $T = T(U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m)$ von $g(\theta)$.

b) Zeige, dass äquivariante Schätzer konstantes Risiko haben.

c) Bestimme die allgemeine Form eines äquivarianten Schätzers.

d) Zeige: Falls $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ die besten äquivarianten Schätzer von μ und ν sind und falls $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ und $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ unabhängig sind, dann ist $T = \hat{\mu} - \hat{\nu}$ UMRE für $g(\theta)$.

2. Zeige mit Hilfe des Lemmas von Basu (Skript Seite 41, Lemma 4.4), dass

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

unabhängig sind, wenn X_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Abgabe: Freitag, 23. Dezember oder Dienstag, 10. Januar

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.