Übung 7

1. Wenn T eine Überlebenszeit mit Dichte f auf $(0, \infty)$ ist, dann ist die sogenannte Hazardfunktion von Interesse:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{P[t \leq T \leq t+h \,|\, T \geq t]}{h} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \\ &= -\frac{d}{dt} \log(1-F(t))\end{aligned}$$

(vgl. Aufgabe 1, Serie 6 der Einführungsvorlesung im SS 05).

Wir betrachten eine einparametrische Familie von Verteilungen für Überlebenszeiten, die definiert ist über die Hazardfunktion

$$\lambda_\theta(t) = \theta \lambda_0(t), \quad \theta \in \mathbb{R}^+,$$

wobei $\lambda_0(t)$ die als bekannt angenommene Hazardfunktion unter der Standardbehandlung ist.

a) Zeige, dass es sich hier um eine exponentielle Familie handelt.

b) Bestimme die Form des gleichmässig mächtigsten Tests der Nullhypothese $\theta \leq 1$ gegen die Alternative $\theta > 1$ für n i.i.d. Beobachtungen $T_1, \ldots, T_n \sim F_\theta$.

2. Seien X und Y unabhängig, $X \sim \mathrm{Bin}(n, p_1)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p_2)$, z.B. die Anzahl Erfolge bei zwei verschiedenen medizinischen Behandlungen. Wir wollen einen UMPU-Test bestimmen für die Nullhypothese $p_1 \leq p_2$, d.h. die erste Behandlung ist höchstens so wirksam wie die zweite.

a) Zeige, dass sich die Verteilung von X und Y schreiben lässt als

$$P_{\underline{\theta}}[X = x, Y = y] = \exp\left[\theta_1 T_1(x,y) + \theta_2 T_2(x,y) + d(\theta_1, \theta_2)\right] h(x,y)$$

derart, dass die Nullhypothese lautet $\theta_1 \leq 0$.

b) Berechne die bedingte Verteilung $P_{(\theta_1 = 0, \theta_2)}[T_1 = t_1 | T_2 = t_2]$. Um welche Verteilung handelt es sich? Begründe anschaulich, warum diese Verteilung auftritt, wenn man auf T_2 bedingt.

c) Wie würde der UMPU-Test zum Niveau 5% entscheiden, falls $n = 8,\ X = 7$ und $m = 7,\ Y = 2$?

Abgabe: Freitag, 16. Dezember

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.