Übung 6

1. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim p_\theta(x)dx$ mit $p_\theta(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$.

a) Berechne die Cramér-Rao-Schranke für die Schätzgrösse $g(\theta) = \theta$ und die Varianz des Schätzers $T_n = \frac{1}{n}\sum X_i$. (Die Voraussetzungen für die Cramér-Rao-Ungleichung müssen nicht verifiziert werden.)

b) Der Maximum-Likelihood Schätzer U_n für θ ist der Median von $(X_1, \ldots, X_n)$. Berechne die Varianz von U_5 unter Verwendung des folgenden Lemmas.
Wenn $X_1, \ldots, X_5$ i.i.d. mit Dichte f und kumulativer Verteilungsfunktion F, dann hat $X_{(3)}$ die Dichte

$$\frac{5!}{2!2!}f(x)F(x)^2(1-F(x))^2.$$

Ist U_5 oder T_5 vorzuziehen?
Hinweis: $\int_0^\infty x^2 e^{-kx}\,dx = 2/k^3$.

c) (freiwillig). Gib eine heuristische Begründung für obiges Lemma. Drücke dazu das Ereignis $x \leq X_{(3)} \leq x + dx$ aus mit Hilfe von $X_1, \ldots, X_5$.

d) Es gilt, dass für $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim f$ mit

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \int_{m}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

die Verteilung von

$$\sqrt{n}\big(\text{Median}(X_1, \ldots, X_n) - m\big)$$

schwach gegen die $\mathcal{N}(0, \frac{1}{(2f(m))^2})$- Verteilung konvergiert. Was für ein Verhalten von $\text{Var}\,(U_n)$ legt dieses Resultat nahe?
Vergleiche mit der Cramér-Rao-Ungleichung.

2. Zeige, dass die eindimensionale Cramér-Rao-Ungleichung $Var_\theta(T) \geq g'(\theta)^2/I(\theta)$ invariant ist unter differenzierbaren Parametertransformationen $\eta = q(\theta)$ mit $q'(\theta) > 0\ \forall\theta$.
Hinweis: Nicht der Schätzer T wird transformiert, sondern die Modellklasse wird neu parametrisiert! T ist also erwartungstreu für eine Funktion $h(\eta)$. Bestimme h und überlege, wie sich die Fisherinformation ändert.

Abgabe: Freitag, 9. Dezember

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.