Übung 5

1. Seien X_1, X_2 unabhängig, Exp(α)-verteilt.

a) Zeige, dass X_1 gegeben $S := X_1 + X_2 = s$ uniform verteilt ist auf $[0, s]$ (für jedes α, d. h. S ist suffizient!).
Hinweis: Berechne die gemeinsame Dichte von (X_1, S) gemäss Satz A.1 und damit die bedingte Dichte von X_1 gegeben $S = s$ gemäss Abschnitt A.1.2.

b) Wir wollen $g(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} = P[X_i \leq 1]$ schätzen. Dazu gehen wir aus von $T = 1_{[X_1 \leq 1]}$. Konstruiere daraus zwei Schätzer, die nur von S abhängen, nämlich $T' = \mathbf{E}[T|S]$ gemäss dem Satz von Rao-Blackwell und den randomisierten Schätzer gemäss Satz 2.2 vom Skript.

2. Ein Modell mit Dichten der Form

$$p_\theta(x) = e^{\theta^T T(x) + d(\theta)} h(x), \quad \theta \in \mathbb{R}^p,\, T : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^p$$

heisst kanonische exponentielle Familie. Dies ist eine exponentielle Familie mit $c_j(\theta) = \theta_j$. Wir setzen

$$M(\theta) = \int_{\mathbb{X}} e^{\theta^T T(x)} h(x) \mu(dx),$$

d.h. es gilt $e^{d(\theta)} = \frac{1}{M(\theta)}$. Der natürliche Parameterraum ist also $\Theta = \{\theta;\ M(\theta) < \infty\}$.

a) Zeige mit Hilfe der Hölder-Ungleichung, dass für $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ und $0 < \alpha < 1$ gilt

$$M(\alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2) \leq M(\theta_1)^\alpha M(\theta_2)^{1-\alpha},$$

d.h. der natürliche Parameterraum Θ ist konvex, und $d(\theta)$ ist konkav.

b) Zeige, dass gilt

$$\frac{d}{d\theta} d(\theta) = -\mathbf{E}_\theta\left[T\right],$$

sofern man Ableitung und Integral vertauschen darf (dies kann man mit Hilfe des Satzes von Lebesgue rechtfertigen für die inneren Punkte von Θ).
Was folgt daraus im Beispiel der n-dimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}\left(0, Q^{-1}\right)$

$$p_\theta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \det(Q)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} x^T Q x\right\},$$

$\theta = (Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{1n}, Q_{22}, Q_{23}, \ldots, Q_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$?

Abgabe: Freitag, 2. Dezember

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.