Übung 4

1. $X_1, \ldots, X_n$ seien i.i.d. Binomial$(1, \theta)$-verteilt, d.h. $S(\underline{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \sim$ Binomial(n, θ) mit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Als a-priori-Verteilung für $\theta \in [0, 1]$ wählen wir die Beta(γ, δ)-Verteilung mit Dichte

$$\alpha(\theta) = \frac{\Gamma(\gamma + \delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \theta^{\gamma - 1}(1 - \theta)^{\delta - 1},$$

vgl. Anhang A.3.2.

a) Berechne die bedingte Verteilung von θ gegeben $\underline{X}$.

b) Berechne den Bayes-Schätzer für θ bei quadratischem Verlust allgemein sowie konkret für $\gamma = 2,\ \delta = 2,\ n = 7$, Beobachtungen $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $S(\underline{x}) = 7$.

c) Berechne für die konkreten Daten aus Teil b) die Entscheidung des Bayes-Tests für $\Theta_0 = \{\theta : \ \theta \leq \frac{1}{2}\}$ gegen $\Theta_0^c = \{\theta : \ \theta > \frac{1}{2}\}$, wobei die Verlustfunktion gegeben ist durch:

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \theta \in \Theta_0, a = 1 \quad \text{(Verlust bei Fehler 1.Art)} \\ 0.05 & \text{falls } \theta \in \Theta_0^c, a = 0 \quad \text{(Verlust bei Fehler 2.Art)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ mit θ unbekannt. Wir wählen als a-priori-Verteilung α für θ eine $\mathcal{N}(\xi, \tau^2)$-Verteilung.

a) Zeige, dass die gemeinsame Verteilung von (θ, X), die a-posteriori Verteilung von θ gegeben $X = x$ und die Randverteilung Q von X alles Normalverteilungen sind. Berechne die Erwartungswerte und die Inverse der Kovarianzmatrix bzw. im eindimensionalen Fall die Varianzen mit quadratischen Ergänzungen.

b) Betrachte den Fall, wo $\tau^2 = 1$ und $|X - \xi|$ wesentlich grösser als 1. Was bedeutet diese letzte Bedingung? Skizziere in derselben Figur die a-priori-, die Likelihood- und die a-posteriori-Dichte. Ist das intuitiv einleuchtend?

c) Begründe, dass die obige Verteilung äquivalent ist zu

$$\theta = \xi + \epsilon, \quad X = \xi + \epsilon + \eta,$$

mit ϵ, η unabhängig $\mathcal{N}(0, \tau^2)$ bzw. $\mathcal{N}(0, 1)$.
Leite daraus die Randverteilung Q ab.

d) Wir nehmen an, dass (θ_i, X_i) i.i.d. sind mit der gemeinsamen Verteilung aus a). Beobachtet ist jedoch nur $X_1, \ldots, X_n$. Als Beispiel kann man sich folgende Situation vorstellen:

$$\begin{aligned} \theta_j &= \text{wahrer Blutdruck der } j\text{-ten Person}, \\ X_j &= \text{gemessener Blutdruck der } j\text{-ten Person}. \end{aligned}$$

Schätze ξ, τ^2 mit Maximum Likelihood und gib den empirischen Bayesschätzer für θ_j an.

Abgabe: Freitag, 25. November

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.