Übung 3

1. Eine Erdölgesellschaft besitzt die Ausbeutungsrechte an einem bestimmten Ort, an dem sich entweder Öl befindet (θ_1) oder nicht (θ_2). Sie hat drei Aktions-Möglichkeiten: a_1: Selbst bohren, a_2: Rechte mit anderer Gesellschaft teilen, a_3: Rechte verkaufen.

Die Verluste sind dabei wie folgt:

$L(\theta, a)$	a_1	a_2	a_3
θ_1	0	4	7
θ_2	12	8	0

Sei X das Ergebnis einer seismischen Untersuchung codiert als 0 und 1. Man kennt die Verteilungen für X, wenn Öl vorliegt und wenn nicht:

$P_\theta(X)$	$X = 0$	$X = 1$
θ_1	0.3	0.7
θ_2	0.6	0.4

a) Gib alle möglichen Verfahren an. Welche davon scheinen Dir auf keinen Fall sinnvoll zu sein?

b) Berechne und zeichne die Risikopunkte $(R(\theta_1, d), R(\theta_2, d))$ für alle möglichen Verfahren d.

c) Welches ist das Minimax-Verfahren unter allen Verfahren?

d) Gib alle unzulässigen Verfahren an. Vergleiche mit Deinem Ergebnis bei a).

e) Bestimme grafisch das Bayes-Verfahren für eine beliebige à-priori-Verteilung.

2. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit den drei möglichen Werten 1, 2 und 3. Die Menge aller möglichen Verteilungen für X_i identifizieren wir mit dem Simplex

$$S_2 = \{(p_1, p_2, p_3) \,|\, p_i \geq 0, p_1 + p_2 + p_3 = 1\}.$$

Als parametrisches Modell betrachten wir $p_1 = \theta^2$, $p_2 = 2\theta(1-\theta)$, $p_3 = (1-\theta)^2$ mit $\theta \in [0, 1]$.

Dieses Modell ist in der Genetik bekannt als das *Hardy-Weinberg-Modell*: X_i bezeichnet den Phänotypen AA, Aa oder aa, und θ ist die unbekannte Häufigkeit des Allels A. Obige Wahrscheinlichkeiten ergeben sich als Gleichgewichtszustand bei zufälligen Paarungen.

a) Zeichne das parametrische Modell als Kurve im Simplex S_2.

b) Gib 2 verschiedene Abbildungen

$$Q : S_2 \to [0, 1]$$

an mit $Q(P_\theta) = \theta$.

c) Bestimme die Schätzer $\hat{\theta}$, die sich aus den in b) gefundenen Funktionalen ergeben.

d) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{MLE}$ und gib ein Funktional $Q : S_2 \to [0,1]$ an, so dass
$$Q(P_n) = \hat{\theta}_{MLE}.$$

Abgabe: Freitag, 18. November

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.