Übung 2

1. Wir betrachten das lineare Modell

$$Y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\theta} + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Wir wollen den Erwartungswert einer neuen Beobachtung an der Stelle $\mathbf{x}_0$ vorhersagen, d.h. der Parameter von Interesse ist $g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}_o^T \boldsymbol{\theta}$.

a) Berechne die Varianz des naheliegenden Schätzers $\mathbf{x}_o^T \hat{\boldsymbol{\theta}}$, wobei $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer ist.

b) Bestimme ein Pivot für $g(\boldsymbol{\theta})$, analog zu den Pivots für θ_j im Skript. Wie ist dieses Pivot verteilt?

c) Zeige, dass $\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}$ ein Pivot ist, falls der Parameter von Interesse σ ist.

2. Bei wiederholten Messungen einer Konstanten kann es geschehen, dass aufeinanderfolgende Beobachtungen abhängig sind. Wir untersuchen die Auswirkungen der Abhängigkeit in folgendem Modell

$$X_i = \mu + \epsilon_i$$

$(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ normalverteilt, $E[\epsilon_i] = 0$, $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = \sigma^2 \rho^{|i-j|}$ mit $|\rho| < 1$.

a) Wir schätzen μ durch das arithmetische Mittel $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Welche Verteilung hat $\bar{X}_n$ in obigem Modell?

b) Im Untermodell, wo $\sigma^2 = 1$, $\rho = 0$ und μ unbekannt, ist $I_n = [\bar{X}_n \pm 1.96/\sqrt{n}]$ ein 95%-Konfidenzintervall für μ. Berechne die asymptotische Überdeckungswahrscheinlichkeit von I_n im grösseren Modell, wo $\sigma^2 = 1$ bekannt und ρ und μ unbekannt sind, d. h. berechne

$$\lim_{n \to \infty} P_{\mu,\rho}[I_n \ni \mu]\,.$$

Was passiert für $\rho \to \pm 1$? Kann man also die Abhängigkeit vernachlässigen oder nicht?

Abgabe: Freitag, 11. November

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.