# Übung 13

**1.** **a)** Bestimme eine varianzstabilisierende Transformation für

$$X_i \text{ i.i.d. } \sim \text{ Poisson}(\lambda),\ T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

**b)** ... und für

$$X_i \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{N}_2\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right),\ T_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_{i,1}X_{i,2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_{i,1}^2 \sum_{i=1}^n X_{i,2}^2}}.$$

(Die asymptotische Varianz von $T_n$ ist $(1-\rho^2)^2$, siehe Skript.)

**c)** Bestimme ein genähertes 95%-Konfidenzintervall für $\rho$ bei $n = 25$ und $T_n = 0.5$, basierend auf den approximativen Pivots $(i)$ $\frac{\sqrt{n}(T_n-\rho)}{1-T_n^2}$ und $(ii)$ $\sqrt{n}(g(T_n) - g(\rho))$, wobei $g$ die in b) bestimmte Transformation ist. Diskutiere die Unterschiede.

**2.** Wir betrachten das folgende Funktional $Q$ auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}^p$,

$$Q(F) = \int\int h(x,y)dF(x)dF(y),$$

wobei $h : \mathbb{R}^{2p} \to \mathbb{R}$ beschränkt und symmetrisch ist ($h(x,y) = h(y,x)$).

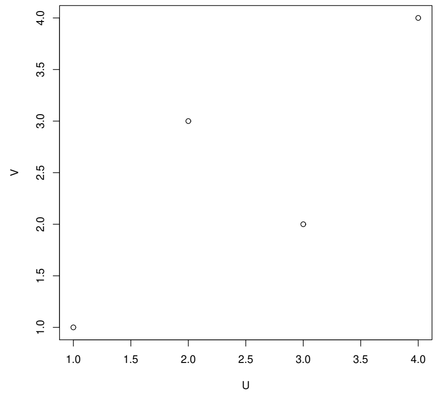
**a)** Berechne $Q(F_n)$ für die empirische Verteilung $F_n$ von $X_1, \ldots, X_n$. Ist $Q(F_n)$ erwartungstreu für $Q(F)$ falls $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim F$?

**b)** Berechne die Gateaux- Ableitung des Funktionals $Q$ und gib die Einflussfunktion an.

**c)** Sei $X \in \mathbb{R}^2$, d.h. $X = (U, V)$ und

$$h(X_1, X_2) = 1_{[(U_1-U_2)(V_1-V_2)>0]} - 1/2.$$

Berechne $Q(F)$ falls $U$ und $V$ unter $F$ unabhängig sind und $F$ eine Dichte hat. Berechne $Q(F_4)$ für die untenstehende Konfiguration von 4 Beobachtungen.




Begründe, weshalb $Q(F_n)$ ein Mass für die Abhängigkeit der $(U_i, V_i)$ Werte ist.
*Bemerkung*: $2Q(F_n)$ ohne die Diagonalterme ist die Rangkorrelation von Kendall.

**Präsenz:** Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.