Übung 12

1. Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wir schätzen die beiden Parameter μ und σ mit dem 2-dimensionalen M-Schätzer T_n, der gegeben ist durch $\psi_1(x,t) = \text{sign}(x - t_1)$ und $\psi_2(x,t) = \text{sign}(\frac{|x-t_1|}{t_2} - \Phi^{-1}(\frac{3}{4}))$. ($\Phi$ ist die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und sign die Vorzeichenfunktion, d.h. $\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $\text{sign}(0) = 0$.)

a) Berechne T_n explizit.

b) Zeige, dass die wesentliche Bedingung für Konsistenz (von T_n für μ und σ) gilt, nämlich $\int \psi(x,\theta) P_\theta(dx) = 0$ für $\theta = (\mu, \sigma)$.

c) Berechne die asymptotische Kovarianzmatrix von T_n gemäss der Formel

$$V(\theta) = M(\theta)^{-1} E\big[\psi(X_i,\theta)\psi(X_i,\theta)^T\big] M(\theta)^{-T}$$

und

$$M(\theta) = -\int \psi(x,\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} \varphi_\theta(x)^T \, dx$$

(vgl. Skript (6.11) und (6.13)) unter Benutzung von

$$M(\theta)^{-1} \quad = \quad -\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2\varphi(0)} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{4q\varphi(q)} \end{pmatrix}, \qquad q = \Phi^{-1}\left(\frac{3}{4}\right).$$

d) Kontrolliere den obigen Ausdruck für $M(\theta)^{-1}$.

2. Sei $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $\sim P_0$ und (T_n) eine Folge von p-dimensionalen M-Schätzern, d.h. $T_n = \arg\min_{t \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n \rho(X_i, t)$. Wir nehmen an, dass $T_n \overset{P_0}{\to} t_0$, und wir betrachten für $u \in \mathbb{R}^p$

$$Z_n(u) = \sum_{i=1}^n \{\rho(X_i, t_0 + u/\sqrt{n}) - \rho(X_i, t_0)\}.$$

a) Zeige, dass $\arg\min_u Z_n(u) = \sqrt{n}(T_n - t_0)$.

b) Zeige, dass in "regulären Fällen" $Z_n(u)$ für beliebiges festes u in Verteilung konvergiert gegen

$$Z(u) = u^T W + \frac{1}{2} u^T M u,$$

wobei W ein normalverteilter Zufallsvektor ist und M eine deterministische positiv definite Matrix. Gib M sowie den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix von W explizit an. Was für Bedingungen benötigt man für dieses Resultat?

c) Berechne die Verteilung von $\arg\min_u Z(u)$.

Bemerkung: Diese Ideen können für einen alternativen Beweis der asymptotischen Normalität von M-Schätzern benutzt werden (mit $\rho(x,t) = -\log p_t(x)$).

Abgabe: Freitag, 3. Februar

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.