Übung 11

1. Wir betrachten das folgende Modell von i.i.d. Paaren (X_i, Y_i):

$$\begin{aligned} X_i &= U_i + \xi_i \\ Y_i &= \alpha + \beta U_i + \varepsilon_i \end{aligned}$$

mit $U_i, \xi_i, \varepsilon_i$ alle unabhängig und $\mathcal{N}\left(0, \sigma_U^2\right)$, bzw. $\mathcal{N}\left(0, \sigma_\xi^2\right)$, bzw. $\mathcal{N}\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$. Die Variablen $U_i, \xi_i, \varepsilon_i$ können dabei nicht für sich allein beobachtet werden. Der Unterschied zum linearen Modell besteht also darin, dass sowohl die X- als auch die Y-Variable mit Fehlern behaftet ist.

Zeige dass der Kleinste-Quadrate-Schätzer

$$(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n) = \arg\min_{\alpha,\beta} \sum_{i=1}^n (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2$$

inkonsistent ist für (α, β).

Hinweis:
Gehe aus von der expliziten Formel für $\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n$ (siehe Ergänzungen zum Skript, p.4) und wende das Gesetz der grossen Zahlen an, oder zeige dass die essentielle Bedingung (6.7) für Konsistenz von M-Schätzern verletzt ist.

2. Wir betrachten das Hardy-Weinberg-Modell, vgl. Aufgabe 2, Übung 3. Das heisst $X_1, X_2, \ldots$ sind i.i.d. mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ und

$$\mathrm{P}_\theta\left[X_i = 1\right] = \theta^2,\ \mathrm{P}_\theta\left[X_i = 2\right] = 2\theta(1-\theta),\ \mathrm{P}_\theta\left[X_i = 3\right] = (1-\theta)^2.$$

Die Zufallsgrössen Z_{nj} sind definiert als $Z_{nj} = \sum_{i=1}^n 1_{[X_i = j]}$.

a) Zeige, dass der MLE

$$\hat{\theta}_n = \frac{Z_{n1}}{n} + \frac{Z_{n2}}{2n}$$

asymptotisch normal ist und berechne die asymptotische Varianz.

b) Gleiche Aufgabe wie a) für

$$\tilde{\theta}_n = \sqrt{\frac{Z_{n1}}{n}}.$$

c) Welcher der beiden Schätzer $\hat{\theta}_n$ und $\tilde{\theta}_n$ ist asymptotisch näher beim wahren Wert?

Abgabe: Freitag, 27. Januar

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.