Übung 10

1. Wir nehmen an, dass $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)$, X_j unabhängig $\sim \mathcal{N}(\mu_j, 1)$, $p \geq 3$, mit der Verlustfunktion $L(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}) = ||\boldsymbol{\mu} - \mathbf{a}||^2$. Ferner betrachten wir die Schätzer

$$\mathbf{T}_c = c\mathbf{X} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{T}^* = \left(1 - \frac{p-2}{||\mathbf{X}||^2}\right)\mathbf{X}.$$

Man kann zeigen, dass

$$R(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}^*) \leq 2 + \frac{(p-2)||\boldsymbol{\mu}||^2}{(p-2) + ||\boldsymbol{\mu}||^2}.$$

a) Skizziere den Verlauf der oberen Schranke von $R(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}^*)$ als Funktion von $||\boldsymbol{\mu}||$.

b) Verifiziere, dass $R(\mathbf{0}, \mathbf{T}^*) = 2$.
Hinweis: Wenn $X_1, \ldots, X_p$ i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$, dann ist $||\mathbf{X}||^2$ Gamma$(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$-verteilt. (Die Gamma$(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$-Verteilung heisst auch Chiquadrat-Verteilung mit ν Freiheitsgraden.)

c) Berechne $\arg\min_c R(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}_c)$ als Funktion von $\boldsymbol{\mu}$ und folgere daraus, dass für alle $\boldsymbol{\mu}$

$$R(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}^*) \leq 2 + \min_c R(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{T}_c)$$

gilt. Interpretiere diese Ungleichung in Worten.

2. Seien $X_1, \ldots X_n$ i.i.d. $\sim$ Uniform$(0, \theta)$. Wir betrachten die beiden Schätzfolgen $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $U_n = \frac{n+1}{n} T_n$.

a) Zeige, dass T_n der MLE und U_n der UMVU-Schätzer ist. (Benutze für den Nachweis von UMVU, dass T_n vollständig und suffizient ist.)

b) Berechne Var(T_n) und Var(U_n). Wie rasch konvergieren diese gegen Null für $n \to \infty$?

c) Zeige, dass T_n und U_n konsistent sind für θ.

d) Zeige, dass $n(\theta - T_n) \xrightarrow{d} Z$, wobei Z exponential$(\frac{1}{\theta})$-verteilt ist.

e) Hat $n(\theta - U_n)$ die gleiche asymptotische Verteilung?

Abgabe: Freitag, 20. Januar

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.