Übung 1

1. a) Berechne die Veränderung des arithmethisches Mittels $\hat{\mu}_n$ und der empirischen Varianz S_n^2,

$$\hat{\mu}_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

$$S_n^2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_n)^2 \tag{2}$$

bei Hinzufügen einer Beobachtung an der Stelle x. Hinweis: Für einfache Formeln ist die folgende Beziehung nützlich:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_n)^2 + n(c - \hat{\mu}_n)^2,$$

für beliebiges n und c.

b) Wogegen konvergiert die Teststatistik T des Einstichprobentests,

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{n}\hat{\mu}_n}{S_n},$$

wenn man eine Beobachtung an der Stelle x einfügt und dann mit x gegen $\pm\infty$ geht?
Wie entscheidet also der zweiseitige t-Test (auf dem 5% Niveau) bei Hinzufügen einer extremen Beobachtung?

c) Berechne die Veränderung des α-gestutzten Mittels $\hat{\mu}_n$ bei Hinzufügen einer zusätzlichen Beobachtung bei x im Fall $[n\alpha] = [(n+1)\alpha]$.
Hinweis: Unterscheide 3 Fälle; x wird auf der linken Seite gestutzt ($x \leq x_{(k)}$), x wird auf der rechten Seite gestutzt, x wird nicht gestutzt.

2. Seien X und Y unabhängig mit $X \sim \mathcal{N}(\nu, 1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\eta, 1)$. Der Parameter von Interesse sei $\theta = \nu/\eta$.

a) Zeige, dass

$$\phi(X, Y, \theta_0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |X - \theta_0 Y| \leq c_\alpha\sqrt{1+\theta_0^2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit einem geeigneten c_α ein Test ist zum Niveau α für $H_0 : \theta = \theta_0$. Wie muss man c_α wählen?

b) Bilde mit dem Dualitätslemma einen Konfidenzbereich $I(X, Y)$ für θ zum Niveau $1 - \alpha$. Ist $I(X, Y)$ immer ein endliches Intervall? Falls nicht, welche anderen Fälle sind möglich?
Hinweis: Zeichne die Funktion $f(\theta) = (X - \theta Y)^2/(1 + \theta^2)$. Suche Extrema und bestimme das Verhalten der Funktion für $\theta \to \pm\infty$.

Abgabe: Freitag, 4. November

Präsenz: Donnerstag von 12-13 Uhr, im LEO C15, Leonhardstrasse 27, oder nach Vereinbarung. Bitte ein Email an `lutz@stat.math.ethz.ch` oder `meier@stat.math.ethz.ch` schicken.