Mathematische Grundlagen der Statistik: Überblick über den Stoff der einzelnen Stunden

Hans-Ruedi Künsch, ETHZ

WS 2005/06

Übersicht der Vorlesung vom 26. 10.

- Einführung. Modelle und Fragestellungen der Statistik.
- Das Lokationsmodell für die Messung der Lichtgeschwindigkeit.
- Punktschätzer im Lokationsmodell: Arithmetisches Mittel, Median, gestutztes Mittel und Huberschätzer.
- Kriterien zur Beurteilung von Punktschätzern: Risiko, Sensitivität und Bruchpunkt.
- Äquivarianz von Punktschätzern im Lokationsmodell.

Übersicht der Vorlesung vom 28. 10.

- Der Begriff des Vertrauensintervalls.
- Die Dualität zwischen Tests und Vertrauensintervallen.
- Der Begriff des Pivots. Beispiele im Lokationsmodell.
- Die Verteilung der t-Statistik.
- Beurteilung von Vertrauensintervallen.

Übersicht der Vorlesung vom 2. 11.

- Das lineare Modell für die Abhängigkeit einer Zielgrösse von erklärenden Grössen. Diskussion der Modellannahmen.
- Punktschätzung im linearen Modell: Kleinste Quadrate und Huberschätzer.
- Äquivarianz und Bruchpunkt im linearen Modell.

Übersicht der Vorlesung vom 4. 11.

- Pivots im linearen Modell unter Normalverteilungsannahmen.
- Statistische Tests für den Vergleich zweier Stichproben: t-Test und Wilcoxon-Test.
- Die Ränge einer i.i.d. Stichprobe bilden eine Zufallspermutation. Anwendung für die Verteilung der Wilcoxon-Teststatistik unter der Nullhypothese.

Übersicht der Vorlesung vom 9. 11.

- Randomisierung als Basis für Tests.
- Schätzung von Parametern mit der Momentenmethode.
- Die empirische Verteilung. Schätzung von Parametern mit dem Einsetzprinzip.
- Die Likelihood-Funktion und ihre Verwendung für Punktschätzung, Vertrauensintervalle und Tests.

Übersicht der Vorlesung vom 11. 11.

- Begriffe Aktionsraum, Entscheidungsregel, Verlustfunktion und Risiko.
- Der Vergleich von statistischen Verfahren auf Grund des Risikos ergibt nur eine Partialordnung.
- Die Optimalitätsbegriffe zulässig, minimax, Bayes.
- Illustration im Fall des Testens mit einfacher Hypothese und Alternative.

Übersicht der Vorlesung vom 16. 11.

- A priori und a posteriori Verteilung (Bayes-Formel) im diskreten Fall.
- Bayes-Verfahren minimieren den a posteriori Erwartungswert des Verlusts.
- Beispiel: Rekonstruktion verrauschter Bilder.

Übersicht der Vorlesung vom 18. 11.

- A priori und a posteriori Verteilung im stetigen Fall.
- Beispiel: Poisson-Beobachtungen und Gamma a priori Verteilung.
- Empirische Bayesverfahren: Schätzung der a priori Verteilung.

Übersicht der Vorlesung vom 23. 11.

- Die Idee der suffizienten Statistik: Elimination von irrelevanter Information aus der Beobachtung.
- Definition der suffizienten Statistik: Bedingte Verteilung von X gegeben $S(X) = s$ ist für alle Parameter gleich.
- Beispiele: Bei der Poissonverteilung ist die Summe suffizient, bei der uniformen Verteilung das Maximum.
- Randomisierte Entscheidungen: Zufällige Wahl des irrelevanten Teils der Beobachtung.

Übersicht der Vorlesung vom 25. 11.

- Satz von Rao-Blackwell: Mittelung der Entscheidung über den irrelevanten Teil der Beobachtung.
- Das Faktorisierungskriterium von Neyman für Suffizienz.
- Der Begriff der exponentiellen Familie, Beispiele.
- Das lineare Modell als exponentielle Familie.

Übersicht der Vorlesung vom 30. 11.

- Definitionen: Erwartungstreue Schätzer, UMVU-Schätzer.
- UMVU-Schätzer und Rao-Blackwell.
- Die Chapman-Robbins Ungleichung.

Übersicht der Vorlesung vom 2. 12.

- Herleitung der Cramér-Rao Ungleichung aus der Chapman-Robbins Ungleichung.
- Mehrdimensionale Cramér-Rao-Ungleichung.
- Anwendung auf das lineare Modell. Der Satz von Gauss-Markov mit, bzw. ohne die Annahme der Normalverteilung.

Übersicht der Vorlesung vom 7. 12.

- Score-Funktion und Fisher-Information
- Wann ist die Cramér-Rao Ungleichung scharf ?
- Der Begriff der Erwartungstreue bei Tests.
- UMP und UMPU-Tests bei eindimensionalen exponentiellen Familien.

Übersicht der Vorlesung vom 9. 12.

- UMPU-Tests bei mehrdimensionalen exponentiellen Familien: Bedingen auf den Teil der suffizienten Statistik, der zu den Störparametern gehört.
- Beispiel: Vergleich zweier Poisson-Verteilungen.

Übersicht der Vorlesung vom 14. 12.

- Äquivariante Schätzer im Lokationsmodell. Bestimmung aller äquivarianten Schätzer.
- Invariante Verlustfunktionen, Konstanz des Risikos.
- Optimaler äquivarianter Schätzer wird bestimmt durch Bedingen auf die Invarianten $Y_i = X_i - X_n$.
- Berechnen der bedingten Dichte von X_n gegeben $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$.

Übersicht der Vorlesung vom 16. 12.

- Äquivarianz in allgemeinen Transformationsmodellen.
- Beispiele: Lokation und Skala, Lineares Modell.
- Das Lemma von Basu.
- Invariante Tests.
- Minimax-Verfahren: Wann impliziert konstantes Risiko die Minimax-Eigenschaft ?
- Extended Bayes-Verfahren.

Übersicht der Vorlesung vom 21. 12.

- Minimax-Verfahren: Wann impliziert konstantes Risiko die Minimax-Eigenschaft ?
- Extended Bayes-Verfahren.
- Beispiele: Binomialverteilung, Lokationsmodell.
- Wann ist ein Bayes-Verfahren zulässig ?

Übersicht der Vorlesung vom 23. 12.

- Wann ist ein extended Bayes-Verfahren zulässig ?
- Anwendung auf die Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert.
- Hochdimensionale Daten, Wavelets, Schrumpfung.

Übersicht der Vorlesung vom 11. 1.

- Schätzung des Erwartungswerts von eines normalverteilten p-dimensionalen Zufallsvektors: Bayes- und empirischer Bayes-Schätzer.
- Berechnung des Risikos des Steinschätzers.
- Korollar: Unzulässigkeit des arithmetischen Mittels für $p > 2$.

Übersicht der Vorlesung vom 13. 1.

- Konsistenz.
- Asymptotische Normalität.
- Einflussfunktion, Approximation durch ein arithmetisches Mittel.
- Schätzer als Funktionale, Einflussfunktion als Ableitung.

Übersicht der Vorlesung vom 18. 1.

- Konvergenz in Verteilung: Notwendige und hinreichende Bedingungen.
- Satz von Slutsky.
- Multivariater ZGS.

Übersicht der Vorlesung vom 20. 1.

- Definition von O_P und o_p.
- Funktionen von arithmetischen Mitteln: Definition und Beispiele.
- Delta-Technik, Berechnung der Einflussfunktion.
- M-Schätzer: Definition und Beispiele.
- Prinzip der Konsistenz von M-Schätzern.

Übersicht der Vorlesung vom 25. 1.

- Konsistenzbeweise für M-Schätzer.
- Asymptotische Normalität von M-Schätzern.
- Die Einflussfunktion von M-Schätzern.

Übersicht der Vorlesung vom 27. 1.

- Einflussfunktion und asymptotische Varianz von Quantilen und MLE.
- Schätzer als Funktionale der empirischen Verteilung.
- Fisher-Konsistenz.
- Einflussfunktion als Ableitung des zugehörigen Funktionals.

Übersicht der Vorlesung vom 1. 2.

- Ableitungsbegriffe in normierten Räumen.
- Berechnung der Einflussfunktion für M-Schätzer und für das gestutzte Mittel.
- Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion in der sup-Norm (Glivenko-Cantelli, Kolmogorov).

Übersicht der Vorlesung vom 3. 2..

- Sensitivität und Jackknife.
- Relative Effizienz von Schätzern.
- Supereffizienz.

Übersicht der Vorlesung vom 8. 2.

- Asymptotische Cramér-Rao-Ungleichung.
- Die Grundidee der Robustheit: Minimiere $\int IF(x, Q, P_\theta)^2 P_\theta(dx)$ unter einer Schranke an $\sup_x |IF(x, Q, P_\theta)|$.
- Asymptotische Pivots mit geschätzter Varianz.
- Die Grundidee des verallgemeinerten Likelihoodquotienten-Tests: Taylor-Entwicklung von log Likelihood.