Schriftliche Prüfung
(120 Minuten)

Bemerkungen:

- Erlaubte Hilfsmittel: 10 hand- oder maschinengeschriebene A4 Seiten (=5 Blätter). Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Die Prüfung besteht aus insgesamt **20 Aufgaben**.
- Markieren Sie Ihre Antworten auf dem beiliegenden **Antwortblatt**.
- Jede Aufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Aufgabe können keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein.
- Für jede Aussage gibt es 1 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird. 1 Punkt wird abgezogen, wenn eine Aussage falsch markiert wird. Wenn eine Aussage nicht markiert wird, gibt es keinen Punkt, es wird aber auch kein Punkt abgezogen. Die Punkte werden über die gesamte Prüfung summiert.
- Alle Rechnungsergebnisse sind auf 2 Nachkommastellen gerundet.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!

Viel Erfolg!

Gruppe A

Binomialverteilung und -test

1. Angenommen $X_i \sim Bernoulli(0.6)$ i.i.d. für $i \in \{1,2,3,4,5\}$, wobei $X_i = 0$ einen Misserfolg und $X_i = 1$ einen Erfolg bezeichnet. Dann gilt...

a) $P(X_i = 0) = 0.4$ für alle $i \in \{1,2,3,4,5\}$.
b) $E(X_1) = 0.6$.
c) $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = 5^2 \cdot (0.6 * 0.4)$.
d) $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = 0.36$.

2. Angenommen eine Flaschenpost, welche in den Atlantik geworfen wird, wird mit 20% Wahrscheinlichkeit gefunden. Peter wirft nun 5 Flaschen in den Atlantik. Die Zufallsvariable X_i beschreibt, ob die Flasche i gefunden wurde ($X_i = 1$: gefunden, $X_i = 0$: nicht gefunden). Die Variablen X_i, $i = 1, ..., 5$ können als unabhängig angenommen werden. Die Anzahl gefundener Flaschen kann folgendermassen definiert werden: $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Es gilt ...

a) Y hat eine Binomialverteilung mit $n = 5$ und $\pi = 0.2$.
b) Angenommen $P(Y = 5) = 0.08$, dann ist $P(Y \leq 4) = 0.92$.
c) Man erwartet, dass 2 Flaschen gefunden werden.
d) Der Erwartungswert für die Anzahl nicht gefundener Flaschen ist $E[1 - X_1]$.

3. Bei einen Binomialtest ($n = 8$, $\alpha = 0.05$) mit $H_0 : \pi = 0.3$ und $H_A : \pi > 0.3$ beobachten wir den Wert $x = 5$ als Teststatistik. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Macht für die Alternative mit $\pi = 0.4$ ist grösser als die Macht für die Alternative mit $\pi = 0.6$.
b) Der P-Wert zu $x = 5$ ist kleiner als der p-Wert zur Beobachtung $x = 2$ (keine Rechnung nötig).
c) Je grösser der Fehler 1.Art, desto grösser ist die Macht.
d) Der Verwerfungsbereich ist $K = \{5, 6, 7, 8\}$.

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Verteilung $Binomial(8, 0.3)$ kann man gut mit der Normalverteilung approximieren.

b) Eine Münze (Kopf oder Zahl) wird 50 mal geworfen. Wir erhalten 32 mal Kopf. Ein Binomialtest mit $n = 50$, $H_0 : \pi = 0.5$ und $H_A : \pi \neq 0.5$ würde sich gut eignen, um zu testen, ob die Münze fair ist oder nicht.

c) Angenommen Personen mit einem bestimmten Gen haben (unabhängig voneinander) 70% Wahrscheinlichkeit, dass eine gewisse Krankheit ausbricht. Wir beobachten 100 Personen mit diesem Gen. Die Anzahl erkrankter Personen aus diesen 100 Personen kann gut mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

d) In einer Schulklasse gibt es 10 Mädchen und 5 Jungen. Der Lehrer bestimmt zufällig 4 Schüler, welche die Klasse an einer Schülerdiskussion vertreten sollen. Die Anzahl Mädchen unter den 4 gewählten Schülern kann gut mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

5. Bei einem Binomialtest ($n = 30$, $\alpha = 0.05$) mit $H_0 : \pi = 0.2$ und $H_A : \pi \neq 0.2$ wurde der Verwerfungsbereich $K = \{0, 1\} \cup \{12, ..., 30\}$ konstruiert. Als Teststatistik X haben wir den Wert $x = 2$ erhalten. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Unter H_0 ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2) = 0.03$.

b) $P_{H_0}(X \notin K) \geq 0.95$.

c) Die Macht für die Alternativhypothese H_A ist $P_{H_A}(X \leq 1) + P_{H_A}(X \geq 12)$.

d) Der P-Wert zur Beobachtung $x = 2$ ist $P_{H_0}(X \leq 2)$.

Gruppe A

t-Test

6. In einer Studie wird die Absorption von einem Eisenergänzungsmittel bei Männern und Frauen untersucht. Dafür wurde 20 Männern und 20 Frauen über 3 Wochen hinweg ein Eisenpräparat verabreicht. Vor und nach der Studie wurde bei den Probanden der Ferritin-Gehalt im Blutplasma gemessen. Ferritin ist ein Eisenspeicherprotein des Organismus und weist auf einen möglichen Eisenmangel hin. Die Differenz im Ferritingehalt je Proband ist in der folgenden Tabelle aufgeführt:

männlich x_i	13	24	19	...	31
weiblich y_i	16	8	22	...	14

Wir nehmen an, dass die männlichen und weiblichen Ferritingehalte jeweils unabhängig voneinander sind, sowie einer Normalverteilung folgen mit Erwartungswert μ_x, beziehungsweise μ_y und gleicher Standardabweichung σ.

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Bei einem ungepaarten t-Test können die Stichprobengrössen in beiden Gruppen gleich sein.

c) Bei gepaarten Stichproben hat der gepaarte t-Test in der Regel eine grössere Macht als der ungepaarte t-Test.

d) Der Welch-Test setzt voraus, dass die Messungen x_i und y_i $(i = 1, \ldots, 20)$ die gleiche Standardabweichung haben.

7. Aus den Daten der Eisen-Studie (vorherige Aufgabe) wurden folgende Kennzahlen ermittelt: $\bar{x} = 20.4$, $\bar{y} = 18.9$ und $\hat{\sigma}_x = 3.1$ und $\hat{\sigma}_y = 4.5$. Wir führen nun einen ungepaarten t-Test durch.

a) Wir legen den Test folgendermassen an: $H_0 : \mu_x = \mu_y,\ H_A : \mu_x \neq \mu_y$. Die Macht des Testes ist so grösser als für $H_A : \mu_x > \mu_y$.

b) Der beobachtete Wert der Teststatistik liegt zwischen 1.20 und 1.25.

c) Unter H_0 folgt die Teststatistik einer t_{39}-Verteilung.

d) Angenommen die Teststatistik wäre 0.64 und der Verwerfungsbereich des Tests $H_0 : \mu_x = \mu_y,\ H_A : \mu_x \neq \mu_y$ wäre $(-\infty, -1.69] \cup [1.69, \infty)$ für das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, dann wird die Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen.

8. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir hätten bei der Eisen-Studie unendlich viele Datenpunkte zur Verfügung. Dann wäre unter H_0 die Teststatistik des ungepaarten t-Testes $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt.

b) Angenommen wir würden die Messdaten $\{x_1,...,x_{20}\}$ und $\{y_1,...,y_{20}\}$ von der Eisen-Studie zusammenführen als $\{z_1,...,z_{40}\}$, sodass $z_1 = x_1$,..., $z_{20} = x_{20}$, $z_{21} = y_1$,..., $z_{40} = y_{20}$. Nun führen wir auf diesem Datensatz einen Vorzeichentest durch, um einen durchschnittlichen Eisenzuwachs von 20 zu überprüfen. Die Verteilung der entsprechenden Teststatistik ist nun $Binomial(39, 0.5)$.

c) Angenommen wir betrachten nur die Messdaten der Probandinnen $\{y_1,...,y_{20}\}$ aus der Eisen-Studie ($\bar{y} = 18.9$ und $\hat{\sigma}_y = 4.5$). Nun führen wir einen t-Test durch mit $H_0 : \mu = 20$ und $H_A : \mu \neq 20$. Ein exaktes zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ ist $[16.79, 21.01]$.

d) Angenommen ein t-Test liefert einen P-Wert, der es uns erlaubt, die Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau zu verwerfen. Dann können wir die Nullhypothese auch auf dem 5%-Signifikanzniveau verwerfen.

9. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Beim t-Test muss die wahre Standardabweichung der Zufallsvariablen bekannt sein.

b) Bei einem Einstichproben t-Test ($H_0 : \mu = 0$, $H_A : \mu > 0$, 35 Beobachtungen insgesamt) ist der beobachtete Wert der Teststatistik 2.44. Dann ist der P-Wert etwa 1%.

c) Beim Wilcoxon-Test müssen die Daten normalverteilt sein.

d) Angenommen wir haben $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei die Standardabweichung ($\sigma = 1$) exakt bekannt ist. Wir wollen, dass die Breite des 95%-Vertrauensintervall für μ höchstens 1 beträgt. Dazu bräuchten wir mindestens $n = 16$ Datenpunkte.

Lineare Regression

10. Herr Sigrist testet ein neues Pestizid an seinen Tomaten. Dafür teilt er das Beet in n Bereiche mit je $10\,m^2$ Fläche und misst für jedes Feld den Ertrag in kg Tomaten (Variable `ertrag`). Er möchte diesen Ertrag in Abhängigkeit der verwendeten Pestizidmenge (Variable `pestizid`), gemessen in Liter l, beschreiben. Hierfür verwendet er ein lineares Modell:

$$\text{ertrag}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{pestizid}_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-86.92 -10.27   1.99  11.40  38.03

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.0914     6.7169     ???     0.87
pestizid      0.8388     0.0631   13.29   <2e-16 ***
---
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 22.3 on 46 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.793,       Adjusted R-squared:  0.789
```

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die lineare Regression wurde basierend auf $n = 49$ Datenpunkten berechnet.

b) Der Effekt der Pestizidmenge ist signifikant auf dem 1%-Niveau.

c) Ein approximatives, zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für β_1 ist gegeben durch $[0.71, 0.97]$.

d) Der t-Wert von β_0 ist 0.16.

11. Mit Hilfe des Modells aus der Pestizid-Studie (vorherige Aufgabe) wollen wir nun Vorhersagen machen. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

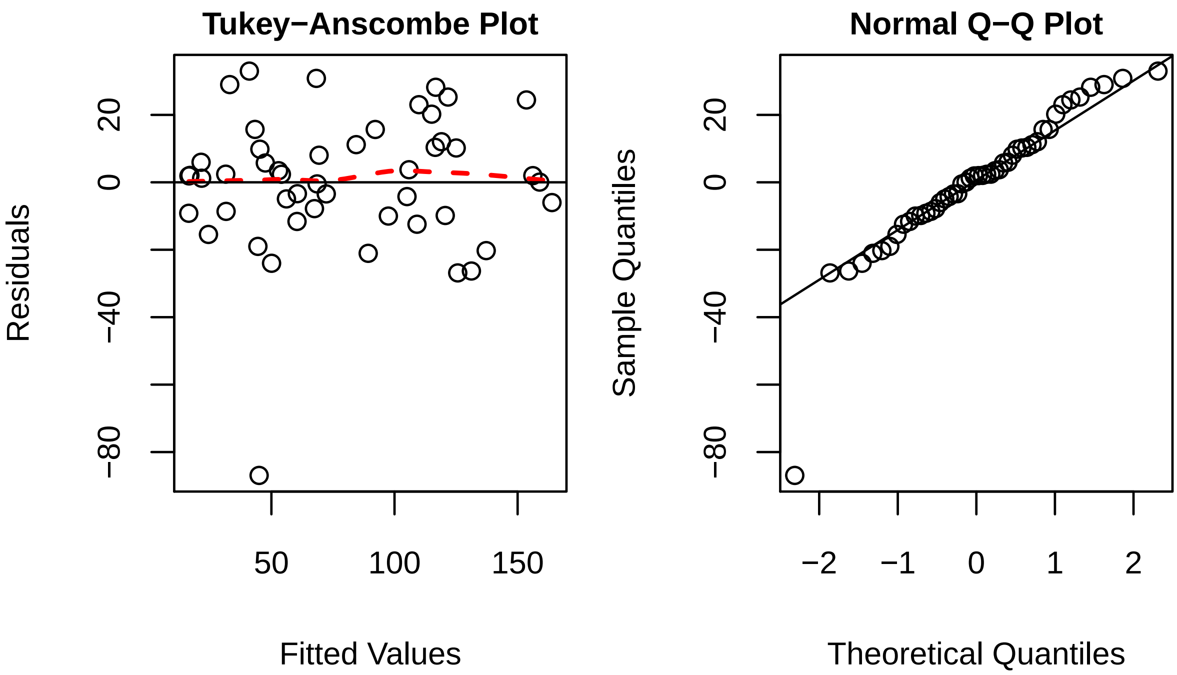
a) Falls die Pestizidmenge um $5\,l$ erhöht wird, so erhöht sich der erwartete Ertrag um etwa $4.19\,kg$ pro Bereich.

b) Falls man im Sinne eines biologischen Anbaus ganz auf den Einsatz von Pestiziden verzichten möchte, so hätte man gemäss des Modells einen erwarteten Ertrag von etwa $0.83\,kg$ pro Bereich.

c) Angenommen man hat mit dem Modell einen erwarteten Ertrag von $40\,kg$ pro Bereich vorhergesagt, dann hat Herr Sigrist etwa $33.55\,l$ Pestizid eingesetzt.

d) Das 95%-Vorhersageintervall für den Ertrag ist immer breiter als das 95%-Vertrauensintervall für den erwarteten Ertrag bei gleicher Pestizidmenge.

12. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots, welche die Residuen aus dem Regressionsmodell der Pestizid-Studie zeigen.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Fehlervarianz ist in etwa konstant.

b) Der Mittelwert der Residuen ist in etwa 0.

c) Die Residuen sind kurzschwänzig verteilt. Die Normalitätsannahme ist stark verletzt.

d) Sowohl der Tukey-Anscombe wie auch der QQ Plot deuten auf einen Ausreisser hin. Es wäre ratsam, diesen Ausreisser von der Analyse auszuschliessen oder robuste Methoden zu verwenden.

Gruppe A

Gemischte Fragen

13. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $E(X) = 2$ und $E(Y) = 5$, wobei X und Y unabhängig sind. Dann gilt $E[2(Y - X) - 1] = 5$.

b) Sei $Var(X) = Var(Y) = 2$, wobei X und Y unabhängig sind. Dann gilt $Var[2(Y - X) - 1] = 0$.

c) Das empirische $20\%-$Quantil der Daten $\{1, 5, 3, 1, 6\}$ ist 3.

d) Die empirische Standardabweichung der Daten $\{1, 5, 3, 1, 6\}$ ist 2.28.

14. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Falls $P(A) = 0.1, P(B) = 0.2$ und $P(A \cup B) = 0.28$. Dann gilt, dass die Ereignisse A und B unabhängig sind.

b) Ein Meteorologe macht die Vorhersage: $odds$(Regen) = 90. Der Regenschirm kann also zu Hause bleiben.

c) Falls $P(G) = 1/3$ und $P(E \cap G) = 1/4$, dann gilt $odds(E \mid G) = 3$.

d) Falls $0 < P(A) = 2P(B) < 1$, dann gilt $odds(B) = 2odds(A)$.

15. Beim Austragen von Briefen gibt es die folgenden Ereignisse:
S = Brief hat eine städtische Adresse, S^C = Brief hat eine ländliche Adresse,
B = Brief kommt an, B^C = Brief kommt nicht an.
Ein Brief hat mit 70% Wahrscheinlichkeit eine städtische Adresse. Aus Erfahrung kommen 90% der Briefe an, welche eine städtische Adresse haben.

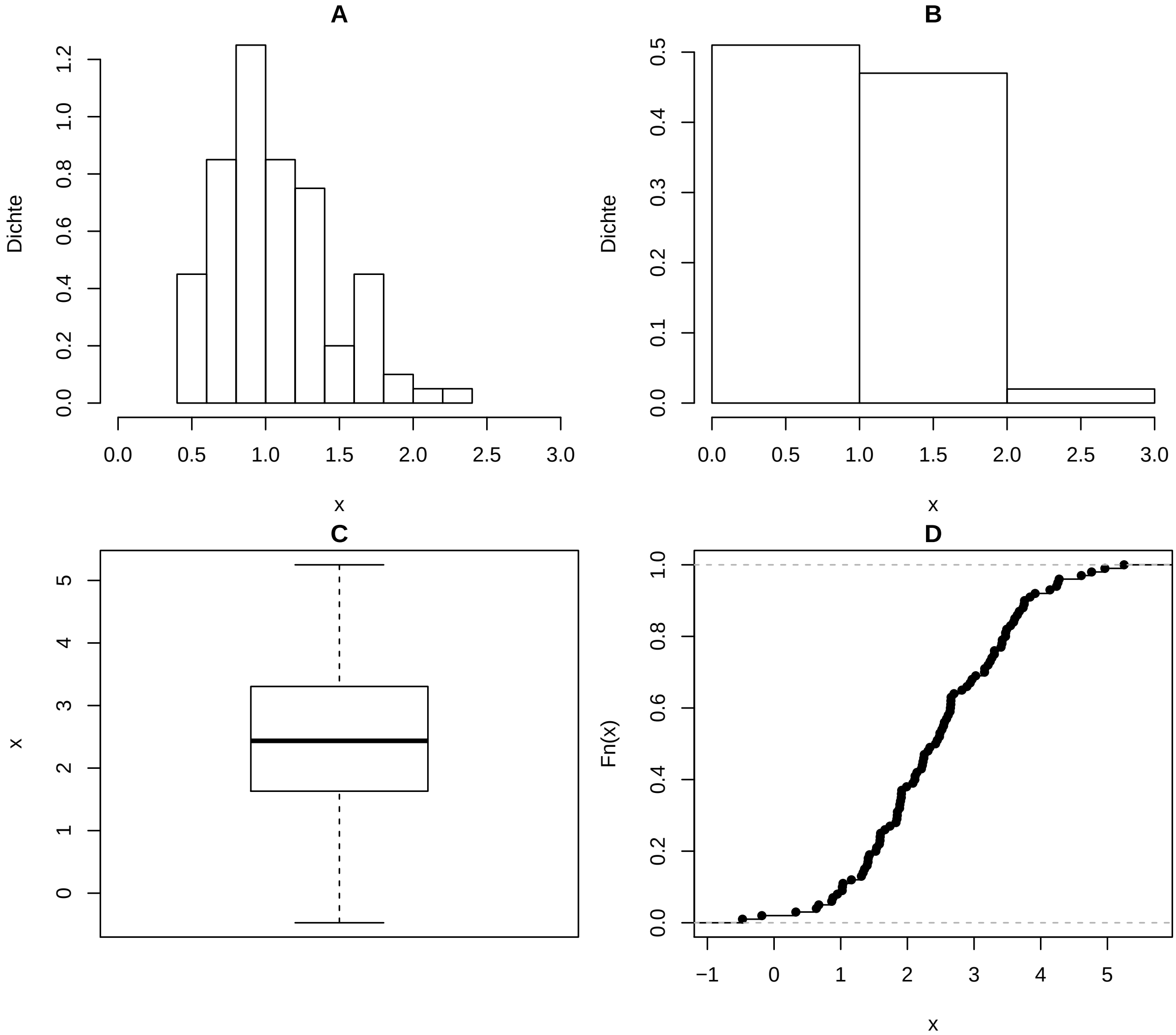
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brief eine städtische Adresse hat und ankommt, ist 0.63.

b) Falls $P(B|S^C)$ bekannt wäre, könnte man die Wahrscheinlichkeit für $P(B)$ mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten berechnen.

c) Die Ereignisse S und B sind unabhängig, falls $P(B) = 0.7$.

d) Angenommen A und B sind zwei disjunkte Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$. Dann ist $P(A|B) = 0$.

16. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Histogramm **A** und Histogramm **B** können **nicht** von den gleichen Daten stammen.

b) Histogramm **A** zeigt eine symmetrische Verteilung.

c) Boxplot **C** beschreibt die gleichen Daten wie Histogramm **A**.

d) Boxplot **C** und die empirische Verteilungsfunktion in Plot **D** können von den gleichen Daten stammen.

17. Es seien $X_1, ..., X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der zentrale Grenzwertsatz sagt: Das arithmetische Mittel von diesen Zufallsvariabeln folgt approximativ einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und einer Varianz σ^2, welche mit grösser werdendem n gegen 0 geht.

b) Die Verteilung F muss bekannt sein, damit der zentrale Grenzwertsatz anwendbar ist.

c) Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass jedes F immer mit einer Normalverteilung approximiert werden kann.

d) Max organisiert eine Party und möchte dafür $10\,l$ Orangensaft selber pressen. Eine Orange liefert im Schnitt $0.3\ l$ Orangensaft mit einer Standardabweichung von $0.09\ l$. Max kauft 38 Orangen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er aus 38 Orangen weniger als $10\ l$ Saft erhält, ist kleiner als 0.01.

18. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die folgende Funktion $f(x)$ ist **keine** Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{falls } 0 \leq x < 1/6 \\ x & \text{falls } 1/3 \leq x < 2/3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Falls $X \sim Unif(a, b)$ die stetige Uniformverteilung ist, dann gilt für alle $x \in [a, b]$ dass $P(X = x) = \frac{1}{b-a}$.

c) Angenommen eine gewisse Wartezeit T ist $Exp(3)$ verteilt. Dann ist $P(T > 2) = e^{-6}$.

d) Seien X und Y zwei unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen mit $E[X] = E[Y] = 1$. Dann gilt $X + Y \sim Pois(1)$.

19. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Im Allgemeinen haben Schätzer keine Varianz.

b) Es sei Z eine Zufallsvariable mit $Z \sim Pois(\lambda)$. Wir haben einen Wert $Z = 3$ beobachtet. Der Maximum Likelihood Schätzer für λ entspricht dem Schätzer der Momentenmethode für λ.

c) Es sei $X \sim Binomial(n = 100, \pi)$. Wir beobachteten den Wert $x = 70$. Der Momentenschätzer für π ist dann 0.7.

d) Für eine doppelte Genauigkeit eines Mittelwertschätzers braucht man doppelt so viele Daten.

20. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei einer einfachen linearen Regression des Intelligenzquotienten (IQ) auf getrunkene Kaffeemenge (K) basierend auf 100 zufällig gewählten Testkandidaten wird $\hat{\beta}_1 = -5$ geschätzt und der t-Test zu $H_0 : \beta_1 = 0$ ist auf 1% signifikant (Regressionsmodell: $IQ_i = \beta_0 + \beta_1 K_i + \epsilon_i$, wobei ϵ_i i.i.d. Fehler). Wir können daraus schliessen, dass hoher Kaffeekonsum einen tiefen IQ verursacht.

b) Sei $Y := 1+2X$, wobei X eine Zufallsvariable ist, dann ist die Korrelation zwischen X und Y gleich 1.

c) Wir betrachten 2 Schüsseln mit jeweils 10 Kugeln. In Schüssel A sind 4 schwarze und 6 weisse Kugeln. In Schüssel B gibt es keine schwarze Kugeln, d.h. alle 10 Kugeln sind weiss. Unsere Strategie ist wie folgt:
Wir wählen zufällig (p = 0.5) entweder A oder B aus und ziehen danach blind aus der ausgewählten Schüssel eine Kugel.
Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist 0.8.

d) Wir nehmen dieselben Schüsseln und Zuteilungen der Kugeln wie in Teilaufgabe c), aber wählen eine neue Strategie:
Die Kugeln aus Schüssel A und B werden in eine grosse Schüssel C geleert und danach ziehen wir blind eine Kugel.
Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist 0.8.

Gruppe B

t-Test

1. In einer Studie wird die Absorption von einem Eisenergänzungsmittel bei Männern und Frauen untersucht. Dafür wurde 20 Männern und 20 Frauen über 3 Wochen hinweg ein Eisenpräparat verabreicht. Vor und nach der Studie wurde bei den Probanden der Ferritin-Gehalt im Blutplasma gemessen. Ferritin ist ein Eisenspeicherprotein des Organismus und weist auf einen möglichen Eisenmangel hin. Die Differenz im Ferritingehalt je Proband ist in der folgenden Tabelle aufgeführt:

männlich x_i	13	24	19	...	31
weiblich y_i	16	8	22	...	14

Wir nehmen an, dass die männlichen und weiblichen Ferritingehalte jeweils unabhängig voneinander sind, sowie einer Normalverteilung folgen mit Erwartungswert μ_x, beziehungsweise μ_y und gleicher Standardabweichung σ.

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Bei einem ungepaarten t-Test können die Stichprobengrössen in beiden Gruppen gleich sein.

c) Bei gepaarten Stichproben hat der gepaarte t-Test in der Regel eine grössere Macht als der ungepaarte t-Test.

d) Der Welch-Test setzt voraus, dass die Messungen x_i und y_i $(i = 1, \ldots, 20)$ die gleiche Standardabweichung haben.

2. Aus den Daten der Eisen-Studie (vorherige Aufgabe) wurden folgende Kennzahlen ermittelt: $\bar{x} = 20.4$, $\bar{y} = 18.9$ und $\hat{\sigma}_x = 3.1$ und $\hat{\sigma}_y = 4.5$. Wir führen nun einen ungepaarten t-Test durch.

a) Wir legen den Test folgendermassen an: $H_0 : \mu_x = \mu_y,\ H_A : \mu_x \neq \mu_y$. Die Macht des Testes ist so grösser als für $H_A : \mu_x > \mu_y$.

b) Der beobachtete Wert der Teststatistik liegt zwischen 1.20 und 1.25.

c) Unter H_0 folgt die Teststatistik einer t_{39}-Verteilung.

d) Angenommen die Teststatistik wäre 0.64 und der Verwerfungsbereich des Tests $H_0 : \mu_x = \mu_y,\ H_A : \mu_x \neq \mu_y$ wäre $(-\infty, -1.69] \cup [1.69, \infty)$ für das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, dann wird die Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen.

3. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir hätten bei der Eisen-Studie unendlich viele Datenpunkte zur Verfügung. Dann wäre unter H_0 die Teststatistik des ungepaarten t-Testes $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt.

b) Angenommen wir würden die Messdaten $\{x_1, ..., x_{20}\}$ und $\{y_1, ..., y_{20}\}$ von der Eisen-Studie zusammenführen als $\{z_1, ..., z_{40}\}$, sodass $z_1 = x_1$,..., $z_{20} = x_{20}$, $z_{21} = y_1$,..., $z_{40} = y_{20}$. Nun führen wir auf diesem Datensatz einen Vorzeichentest durch, um einen durchschnittlichen Eisenzuwachs von 20 zu überprüfen. Die Verteilung der entsprechenden Teststatistik ist nun $Binomial(39, 0.5)$.

c) Angenommen wir betrachten nur die Messdaten der Probandinnen $\{y_1, ..., y_{20}\}$ aus der Eisen-Studie ($\bar{y} = 18.9$ und $\hat{\sigma}_y = 4.5$). Nun führen wir einen t-Test durch mit $H_0 : \mu = 20$ und $H_A : \mu \neq 20$. Ein exaktes zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ ist $[16.79, 21.01]$.

d) Angenommen ein t-Test liefert einen P-Wert, der es uns erlaubt, die Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau zu verwerfen. Dann können wir die Nullhypothese auch auf dem 5%-Signifikanzniveau verwerfen.

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Beim t-Test muss die wahre Standardabweichung der Zufallsvariablen bekannt sein.

b) Bei einem Einstichproben t-Test ($H_0 : \mu = 0,\ H_A : \mu > 0$, 35 Beobachtungen insgesamt) ist der beobachtete Wert der Teststatistik 2.44. Dann ist der P-Wert etwa 1%.

c) Beim Wilcoxon-Test müssen die Daten normalverteilt sein.

d) Angenommen wir haben $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei die Standardabweichung ($\sigma = 1$) exakt bekannt ist. Wir wollen, dass die Breite des 95%-Vertrauensintervall für μ höchstens 1 beträgt. Dazu bräuchten wir mindestens $n = 16$ Datenpunkte.

Gruppe B

Lineare Regression

5. Herr Sigrist testet ein neues Pestizid an seinen Tomaten. Dafür teilt er das Beet in n Bereiche mit je $10\,m^2$ Fläche und misst für jedes Feld den Ertrag in kg Tomaten (Variable `ertrag`). Er möchte diesen Ertrag in Abhängigkeit der verwendeten Pestizidmenge (Variable `pestizid`), gemessen in Liter l, beschreiben. Hierfür verwendet er ein lineares Modell:

$$\text{ertrag}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{pestizid}_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-86.92 -10.27   1.99  11.40  38.03

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.0914     6.7169     ???     0.87
pestizid      0.8388     0.0631   13.29   <2e-16 ***
---
0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 22.3 on 46 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.793,       Adjusted R-squared:  0.789
```

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die lineare Regression wurde basierend auf $n = 49$ Datenpunkten berechnet.

b) Der Effekt der Pestizidmenge ist signifikant auf dem 1%-Niveau.

c) Ein approximatives, zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für β_1 ist gegeben durch $[0.71, 0.97]$.

d) Der t-Wert von β_0 ist 0.16.

6. Mit Hilfe des Modells aus der Pestizid-Studie (vorherige Aufgabe) wollen wir nun Vorhersagen machen. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

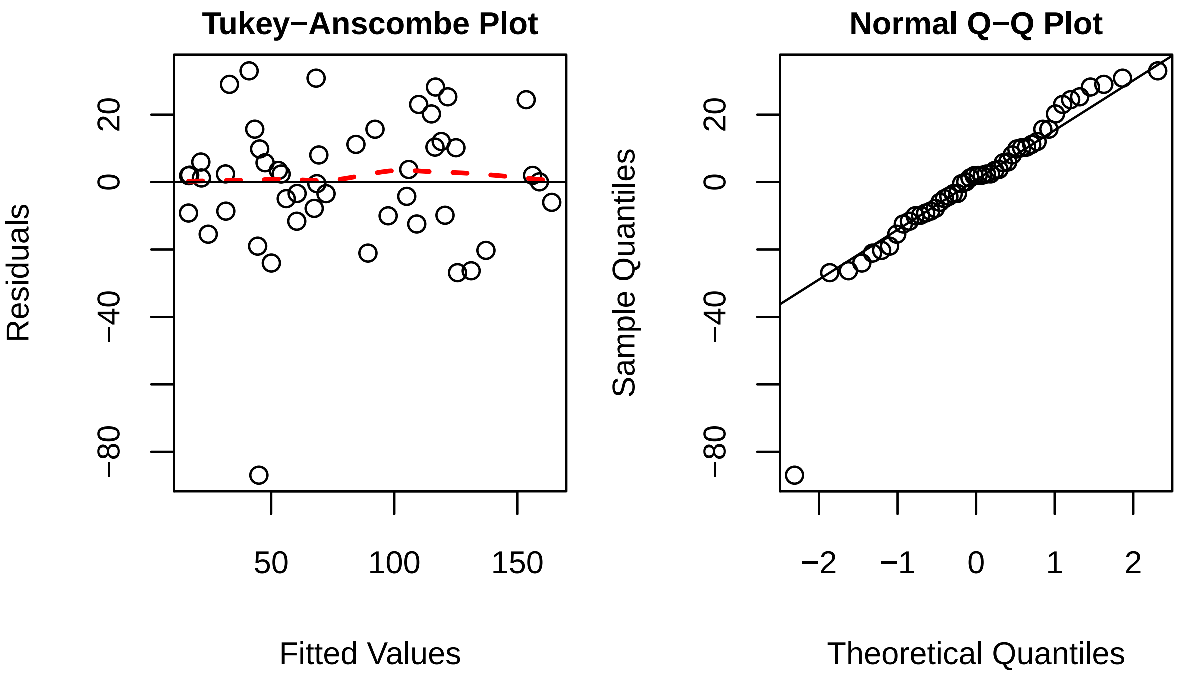
a) Falls die Pestizidmenge um $5\,l$ erhöht wird, so erhöht sich der erwartete Ertrag um etwa $4.19\,kg$ pro Bereich.

b) Falls man im Sinne eines biologischen Anbaus ganz auf den Einsatz von Pestiziden verzichten möchte, so hätte man gemäss des Modells einen erwarteten Ertrag von etwa $0.83\,kg$ pro Bereich.

c) Angenommen man hat mit dem Modell einen erwarteten Ertrag von $40\,kg$ pro Bereich vorhergesagt, dann hat Herr Sigrist etwa $33.55\,l$ Pestizid eingesetzt.

d) Das 95%-Vorhersageintervall für den Ertrag ist immer breiter als das 95%-Vertrauensintervall für den erwarteten Ertrag bei gleicher Pestizidmenge.

7. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots, welche die Residuen aus dem Regressionsmodell der Pestizid-Studie zeigen.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Fehlervarianz ist in etwa konstant.

b) Der Mittelwert der Residuen ist in etwa 0.

c) Die Residuen sind kurzschwänzig verteilt. Die Normalitätsannahme ist stark verletzt.

d) Sowohl der Tukey-Anscombe wie auch der QQ Plot deuten auf einen Ausreisser hin. Es wäre ratsam, diesen Ausreisser von der Analyse auszuschliessen oder robuste Methoden zu verwenden.

Gruppe B

Gemischte Fragen

8. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $E(X) = 2$ und $E(Y) = 5$, wobei X und Y unabhängig sind.
Dann gilt $E[2(Y - X) - 1] = 5$.

b) Sei $Var(X) = Var(Y) = 2$, wobei X und Y unabhängig sind.
Dann gilt $Var[2(Y - X) - 1] = 0$.

c) Das empirische 20%−Quantil der Daten $\{1, 5, 3, 1, 6\}$ ist 3.

d) Die empirische Standardabweichung der Daten $\{1, 5, 3, 1, 6\}$ ist 2.28.

9. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Falls $P(A) = 0.1, P(B) = 0.2$ und $P(A \cup B) = 0.28$. Dann gilt, dass die Ereignisse A und B unabhängig sind.

b) Ein Meteorologe macht die Vorhersage: $odds(\text{Regen}) = 90$. Der Regenschirm kann also zu Hause bleiben.

c) Falls $P(G) = 1/3$ und $P(E \cap G) = 1/4$, dann gilt $odds(E \mid G) = 3$.

d) Falls $0 < P(A) = 2P(B) < 1$, dann gilt $odds(B) = 2odds(A)$.

10. Beim Austragen von Briefen gibt es die folgenden Ereignisse:
S = Brief hat eine städtische Adresse, S^C = Brief hat eine ländliche Adresse,
B = Brief kommt an, B^C = Brief kommt nicht an.
Ein Brief hat mit 70% Wahrscheinlichkeit eine städtische Adresse. Aus Erfahrung kommen 90% der Briefe an, welche eine städtische Adresse haben.

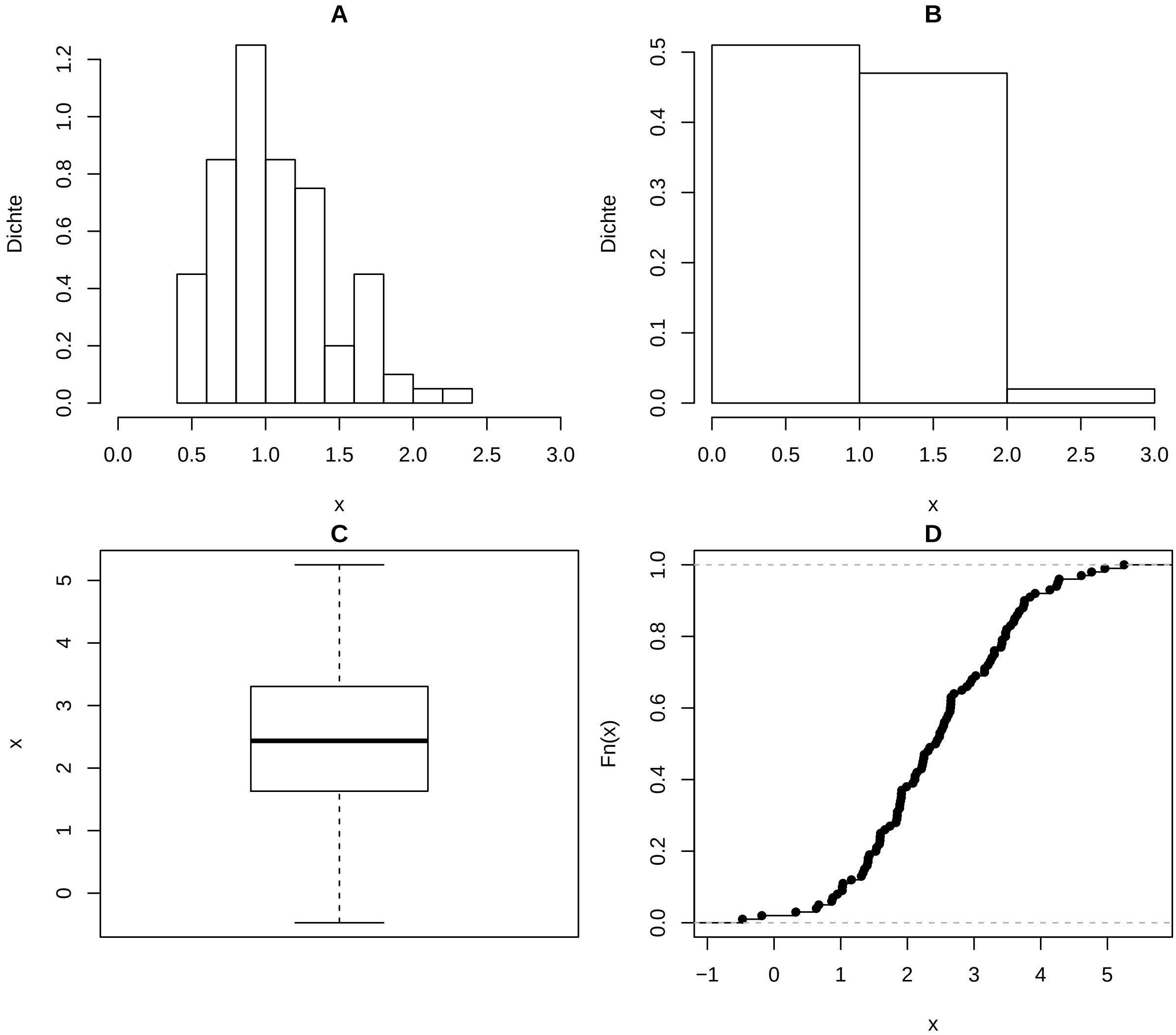
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brief eine städtische Adresse hat und ankommt, ist 0.63.

b) Falls $P(B|S^C)$ bekannt wäre, könnte man die Wahrscheinlichkeit für $P(B)$ mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten berechnen.

c) Die Ereignisse S und B sind unabhängig, falls $P(B) = 0.7$.

d) Angenommen A und B sind zwei disjunkte Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$. Dann ist $P(A|B) = 0$.

11. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Histogramm **A** und Histogramm **B** können **nicht** von den gleichen Daten stammen.

b) Histogramm **A** zeigt eine symmetrische Verteilung.

c) Boxplot **C** beschreibt die gleichen Daten wie Histogramm **A**.

d) Boxplot **C** und die empirische Verteilungsfunktion in Plot **D** können von den gleichen Daten stammen.

12. Es seien $X_1, ..., X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der zentrale Grenzwertsatz sagt: Das arithmetische Mittel von diesen Zufallsvariabeln folgt approximativ einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und einer Varianz σ^2, welche mit grösser werdendem n gegen 0 geht.

b) Die Verteilung F muss bekannt sein, damit der zentrale Grenzwertsatz anwendbar ist.

c) Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass jedes F immer mit einer Normalverteilung approximiert werden kann.

d) Max organisiert eine Party und möchte dafür $10\,l$ Orangensaft selber pressen. Eine Orange liefert im Schnitt $0.3\ l$ Orangensaft mit einer Standardabweichung von $0.09\ l$. Max kauft 38 Orangen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er aus 38 Orangen weniger als $10\ l$ Saft erhält, ist kleiner als 0.01.

13. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die folgende Funktion $f(x)$ ist **keine** Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{falls } 0 \leq x < 1/6 \\ x & \text{falls } 1/3 \leq x < 2/3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Falls $X \sim Unif(a, b)$ die stetige Uniformverteilung ist, dann gilt für alle $x \in [a, b]$ dass $P(X = x) = \frac{1}{b-a}$.

c) Angenommen eine gewisse Wartezeit T ist $Exp(3)$ verteilt. Dann ist $P(T > 2) = e^{-6}$.

d) Seien X und Y zwei unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen mit $E[X] = E[Y] = 1$. Dann gilt $X + Y \sim Pois(1)$.

14. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Im Allgemeinen haben Schätzer keine Varianz.

b) Es sei Z eine Zufallsvariable mit $Z \sim Pois(\lambda)$. Wir haben einen Wert $Z = 3$ beobachtet. Der Maximum Likelihood Schätzer für λ entspricht dem Schätzer der Momentenmethode für λ.

c) Es sei $X \sim Binomial(n = 100, \pi)$. Wir beobachteten den Wert $x = 70$. Der Momentenschätzer für π ist dann 0.7.

d) Für eine doppelte Genauigkeit eines Mittelwertschätzers braucht man doppelt so viele Daten.

Gruppe B

15. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei einer einfachen linearen Regression des Intelligenzquotienten (IQ) auf getrunkene Kaffeemenge (K) basierend auf 100 zufällig gewählten Testkandidaten wird $\hat{\beta}_1 = -5$ geschätzt und der t-Test zu $H_0 : \beta_1 = 0$ ist auf 1% signifikant (Regressionsmodell: $IQ_i = \beta_0 + \beta_1 K_i + \epsilon_i$, wobei ϵ_i i.i.d. Fehler). Wir können daraus schliessen, dass hoher Kaffeekonsum einen tiefen IQ verursacht.

b) Sei $Y := 1+2X$, wobei X eine Zufallsvariable ist, dann ist die Korrelation zwischen X und Y gleich 1.

c) Wir betrachten 2 Schüsseln mit jeweils 10 Kugeln. In Schüssel A sind 4 schwarze und 6 weisse Kugeln. In Schüssel B gibt es keine schwarze Kugeln, d.h. alle 10 Kugeln sind weiss. Unsere Strategie ist wie folgt:
Wir wählen zufällig (p = 0.5) entweder A oder B aus und ziehen danach blind aus der ausgewählten Schüssel eine Kugel.
Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist 0.8.

d) Wir nehmen dieselben Schüsseln und Zuteilungen der Kugeln wie in Teilaufgabe c), aber wählen eine neue Strategie:
Die Kugeln aus Schüssel A und B werden in eine grosse Schüssel C geleert und danach ziehen wir blind eine Kugel.
Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist 0.8.

Binomialverteilung und -test

16. Angenommen $X_i \sim Bernoulli(0.6)$ i.i.d. für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, wobei $X_i = 0$ einen Misserfolg und $X_i = 1$ einen Erfolg bezeichnet. Dann gilt...

- **a)** $P(X_i = 0) = 0.4$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- **b)** $E(X_1) = 0.6$.
- **c)** $\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = 5^2 \cdot (0.6 * 0.4)$.
- **d)** $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = 0.36$.

17. Angenommen eine Flaschenpost, welche in den Atlantik geworfen wird, wird mit 20% Wahrscheinlichkeit gefunden. Peter wirft nun 5 Flaschen in den Atlantik. Die Zufallsvariable X_i beschreibt, ob die Flasche i gefunden wurde ($X_i = 1$: gefunden, $X_i = 0$: nicht gefunden). Die Variablen X_i, $i = 1, ..., 5$ können als unabhängig angenommen werden. Die Anzahl gefundener Flaschen kann folgendermassen definiert werden: $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Es gilt ...

- **a)** Y hat eine Binomialverteilung mit $n = 5$ und $\pi = 0.2$.
- **b)** Angenommen $P(Y = 5) = 0.08$, dann ist $P(Y \leq 4) = 0.92$.
- **c)** Man erwartet, dass 2 Flaschen gefunden werden.
- **d)** Der Erwartungswert für die Anzahl nicht gefundener Flaschen ist $E\left[1 - X_1\right]$.

18. Bei einen Binomialtest ($n = 8$, $\alpha = 0.05$) mit $H_0 : \pi = 0.3$ und $H_A : \pi > 0.3$ beobachten wir den Wert $x = 5$ als Teststatistik. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

- **a)** Die Macht für die Alternative mit $\pi = 0.4$ ist grösser als die Macht für die Alternative mit $\pi = 0.6$.
- **b)** Der P-Wert zu $x = 5$ ist kleiner als der p-Wert zur Beobachtung $x = 2$ (keine Rechnung nötig).
- **c)** Je grösser der Fehler 1.Art, desto grösser ist die Macht.
- **d)** Der Verwerfungsbereich ist $K = \{5, 6, 7, 8\}$.

19. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Verteilung $Binomial(8, 0.3)$ kann man gut mit der Normalverteilung approximieren.

b) Eine Münze (Kopf oder Zahl) wird 50 mal geworfen. Wir erhalten 32 mal Kopf. Ein Binomialtest mit $n = 50$, $H_0 : \pi = 0.5$ und $H_A : \pi \neq 0.5$ würde sich gut eignen, um zu testen, ob die Münze fair ist oder nicht.

c) Angenommen Personen mit einem bestimmten Gen haben (unabhängig voneinander) 70% Wahrscheinlichkeit, dass eine gewisse Krankheit ausbricht. Wir beobachten 100 Personen mit diesem Gen. Die Anzahl erkrankter Personen aus diesen 100 Personen kann gut mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

d) In einer Schulklasse gibt es 10 Mädchen und 5 Jungen. Der Lehrer bestimmt zufällig 4 Schüler, welche die Klasse an einer Schülerdiskussion vertreten sollen. Die Anzahl Mädchen unter den 4 gewählten Schülern kann gut mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

20. Bei einem Binomialtest ($n = 30$, $\alpha = 0.05$) mit $H_0 : \pi = 0.2$ und $H_A : \pi \neq 0.2$ wurde der Verwerfungsbereich $K = \{0, 1\} \cup \{12, ..., 30\}$ konstruiert. Als Teststatistik X haben wir den Wert $x = 2$ erhalten. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Unter H_0 ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2) = 0.03$.

b) $P_{H_0}(X \notin K) \geq 0.95$.

c) Die Macht für die Alternativhypothese H_A ist $P_{H_A}(X \leq 1) + P_{H_A}(X \geq 12)$.

d) Der P-Wert zur Beobachtung $x = 2$ ist $P_{H_0}(X \leq 2)$.

Gruppe C

Gemischte Fragen

1. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $E(X) = 2$ und $E(Y) = 5$, wobei X und Y unabhängig sind.
Dann gilt $E[2(Y - X) - 1] = 5$.

b) Sei $Var(X) = Var(Y) = 2$, wobei X und Y unabhängig sind.
Dann gilt $Var[2(Y - X) - 1] = 0$.

c) Das empirische $20\%-$Quantil der Daten $\{1, 5, 3, 1, 6\}$ ist 3.

d) Die empirische Standardabweichung der Daten $\{1, 5, 3, 1, 6\}$ ist 2.28.

2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Falls $P(A) = 0.1, P(B) = 0.2$ und $P(A \cup B) = 0.28$. Dann gilt, dass die Ereignisse A und B unabhängig sind.

b) Ein Meteorologe macht die Vorhersage: $odds(\text{Regen}) = 90$. Der Regenschirm kann also zu Hause bleiben.

c) Falls $P(G) = 1/3$ und $P(E \cap G) = 1/4$, dann gilt $odds(E \mid G) = 3$.

d) Falls $0 < P(A) = 2P(B) < 1$, dann gilt $odds(B) = 2odds(A)$.

3. Beim Austragen von Briefen gibt es die folgenden Ereignisse:
S = Brief hat eine städtische Adresse, S^C = Brief hat eine ländliche Adresse,
B = Brief kommt an, B^C = Brief kommt nicht an.
Ein Brief hat mit 70% Wahrscheinlichkeit eine städtische Adresse. Aus Erfahrung kommen 90% der Briefe an, welche eine städtische Adresse haben.

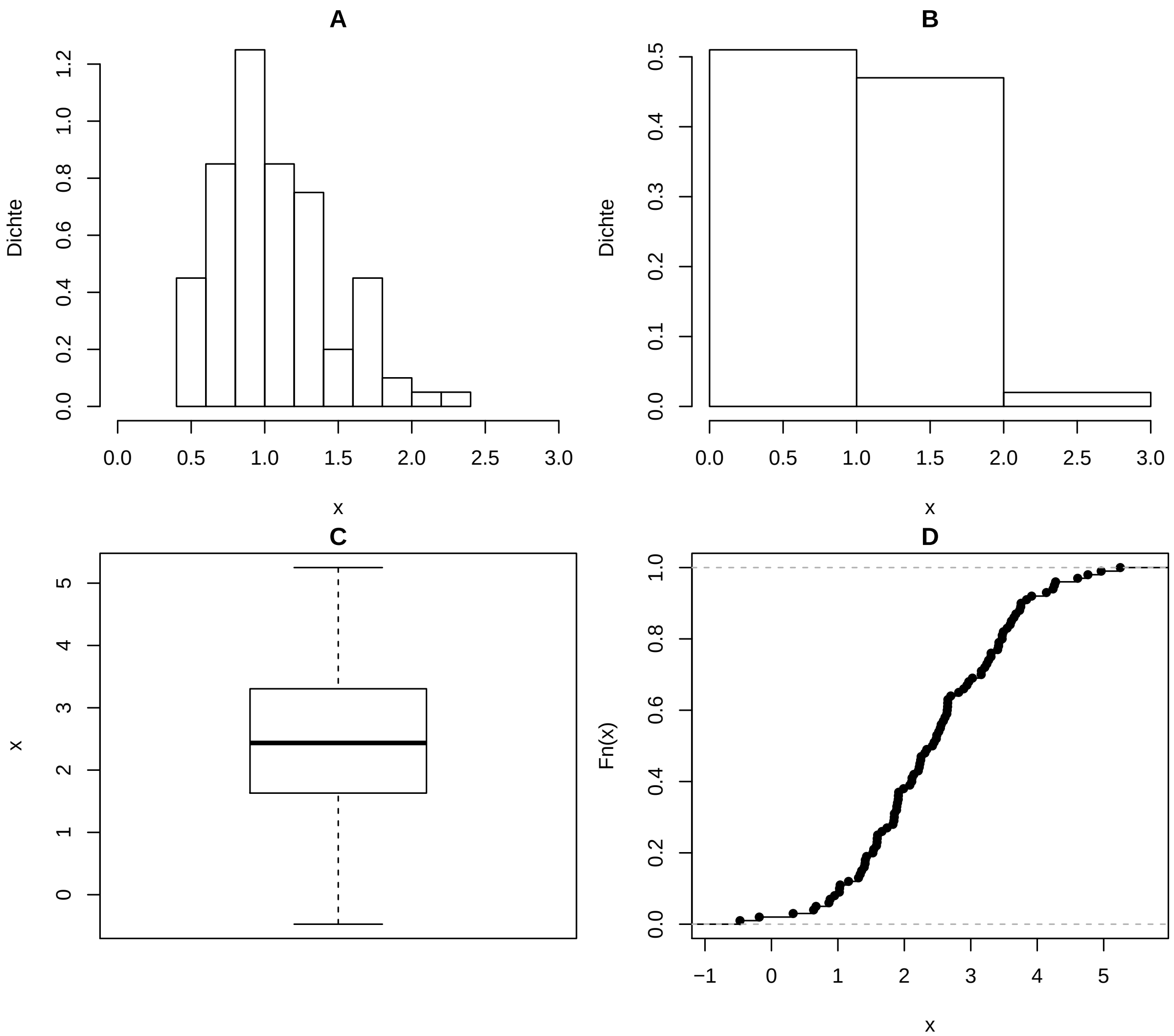
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brief eine städtische Adresse hat und ankommt, ist 0.63.

b) Falls $P(B|S^C)$ bekannt wäre, könnte man die Wahrscheinlichkeit für $P(B)$ mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten berechnen.

c) Die Ereignisse S und B sind unabhängig, falls $P(B) = 0.7$.

d) Angenommen A und B sind zwei disjunkte Ereignisse mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$.
Dann ist $P(A|B) = 0$.

4. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Histogramm **A** und Histogramm **B** können **nicht** von den gleichen Daten stammen.

b) Histogramm **A** zeigt eine symmetrische Verteilung.

c) Boxplot **C** beschreibt die gleichen Daten wie Histogramm **A**.

d) Boxplot **C** und die empirische Verteilungsfunktion in Plot **D** können von den gleichen Daten stammen.

5. Es seien $X_1, ..., X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F$, wobei F eine Verteilung ist mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und endlicher Varianz σ_F^2. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der zentrale Grenzwertsatz sagt: Das arithmetische Mittel von diesen Zufallsvariabeln folgt approximativ einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und einer Varianz σ^2, welche mit grösser werdendem n gegen 0 geht.

b) Die Verteilung F muss bekannt sein, damit der zentrale Grenzwertsatz anwendbar ist.

c) Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass jedes F immer mit einer Normalverteilung approximiert werden kann.

d) Max organisiert eine Party und möchte dafür $10\,l$ Orangensaft selber pressen. Eine Orange liefert im Schnitt $0.3\ l$ Orangensaft mit einer Standardabweichung von $0.09\ l$. Max kauft 38 Orangen. Die Wahrscheinlichkeit, dass er aus 38 Orangen weniger als $10\,l$ Saft erhält, ist kleiner als 0.01.

6. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die folgende Funktion $f(x)$ ist **keine** Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{falls } 0 \le x < 1/6 \\ x & \text{falls } 1/3 \le x < 2/3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Falls $X \sim Unif(a, b)$ die stetige Uniformverteilung ist, dann gilt für alle $x \in [a, b]$ dass $P(X = x) = \frac{1}{b-a}$.

c) Angenommen eine gewisse Wartezeit T ist $Exp(3)$ verteilt. Dann ist $P(T > 2) = e^{-6}$.

d) Seien X und Y zwei unabhängige Poisson verteilte Zufallsvariablen mit $E[X] = E[Y] = 1$. Dann gilt $X + Y \sim Pois(1)$.

7. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Im Allgemeinen haben Schätzer keine Varianz.

b) Es sei Z eine Zufallsvariable mit $Z \sim Pois(\lambda)$. Wir haben einen Wert $Z = 3$ beobachtet. Der Maximum Likelihood Schätzer für λ entspricht dem Schätzer der Momentenmethode für λ.

c) Es sei $X \sim Binomial(n = 100, \pi)$. Wir beobachteten den Wert $x = 70$. Der Momentenschätzer für π ist dann 0.7.

d) Für eine doppelte Genauigkeit eines Mittelwertschätzers braucht man doppelt so viele Daten.

8. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei einer einfachen linearen Regression des Intelligenzquotienten (IQ) auf getrunkene Kaffeemenge (K) basierend auf 100 zufällig gewählten Testkandidaten wird $\hat{\beta}_1 = -5$ geschätzt und der t-Test zu $H_0 : \beta_1 = 0$ ist auf 1% signifikant (Regressionsmodell: $IQ_i = \beta_0 + \beta_1 K_i + \epsilon_i$, wobei ϵ_i i.i.d. Fehler). Wir können daraus schliessen, dass hoher Kaffeekonsum einen tiefen IQ verursacht.

b) Sei $Y := 1+2X$, wobei X eine Zufallsvariable ist, dann ist die Korrelation zwischen X und Y gleich 1.

c) Wir betrachten 2 Schüsseln mit jeweils 10 Kugeln. In Schüssel A sind 4 schwarze und 6 weisse Kugeln. In Schüssel B gibt es keine schwarze Kugeln, d.h. alle 10 Kugeln sind weiss. Unsere Strategie ist wie folgt:
Wir wählen zufällig (p = 0.5) entweder A oder B aus und ziehen danach blind aus der ausgewählten Schüssel eine Kugel.
Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist 0.8.

d) Wir nehmen dieselben Schüsseln und Zuteilungen der Kugeln wie in Teilaufgabe c), aber wählen eine neue Strategie:
Die Kugeln aus Schüssel A und B werden in eine grosse Schüssel C geleert und danach ziehen wir blind eine Kugel.
Die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu ziehen, ist 0.8.

Gruppe C

Binomialverteilung und -test

9. Angenommen $X_i \sim \textit{Bernoulli}(0.6)$ i.i.d. für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, wobei $X_i = 0$ einen Misserfolg und $X_i = 1$ einen Erfolg bezeichnet. Dann gilt...

- **a)** $P(X_i = 0) = 0.4$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- **b)** $E(X_1) = 0.6$.
- **c)** $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = 5^2 \cdot (0.6 * 0.4)$.
- **d)** $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = 0.36$.

10. Angenommen eine Flaschenpost, welche in den Atlantik geworfen wird, wird mit 20% Wahrscheinlichkeit gefunden. Peter wirft nun 5 Flaschen in den Atlantik. Die Zufallsvariable X_i beschreibt, ob die Flasche i gefunden wurde ($X_i = 1$: gefunden, $X_i = 0$: nicht gefunden). Die Variablen X_i, $i = 1, ..., 5$ können als unabhängig angenommen werden. Die Anzahl gefundener Flaschen kann folgendermassen definiert werden: $Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$. Es gilt ...

- **a)** Y hat eine Binomialverteilung mit $n = 5$ und $\pi = 0.2$.
- **b)** Angenommen $P(Y = 5) = 0.08$, dann ist $P(Y \leq 4) = 0.92$.
- **c)** Man erwartet, dass 2 Flaschen gefunden werden.
- **d)** Der Erwartungswert für die Anzahl nicht gefundener Flaschen ist $E\,[1 - X_1]$.

11. Bei einen Binomialtest ($n = 8$, $\alpha = 0.05$) mit $H_0 : \pi = 0.3$ und $H_A : \pi > 0.3$ beobachten wir den Wert $x = 5$ als Teststatistik. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

- **a)** Die Macht für die Alternative mit $\pi = 0.4$ ist grösser als die Macht für die Alternative mit $\pi = 0.6$.
- **b)** Der P-Wert zu $x = 5$ ist kleiner als der p-Wert zur Beobachtung $x = 2$ (keine Rechnung nötig).
- **c)** Je grösser der Fehler 1.Art, desto grösser ist die Macht.
- **d)** Der Verwerfungsbereich ist $K = \{5, 6, 7, 8\}$.

Gruppe C

12. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die Verteilung $Binomial(8, 0.3)$ kann man gut mit der Normalverteilung approximieren.

b) Eine Münze (Kopf oder Zahl) wird 50 mal geworfen. Wir erhalten 32 mal Kopf. Ein Binomialtest mit $n = 50$, $H_0 : \pi = 0.5$ und $H_A : \pi \neq 0.5$ würde sich gut eignen, um zu testen, ob die Münze fair ist oder nicht.

c) Angenommen Personen mit einem bestimmten Gen haben (unabhängig voneinander) 70% Wahrscheinlichkeit, dass eine gewisse Krankheit ausbricht. Wir beobachten 100 Personen mit diesem Gen. Die Anzahl erkrankter Personen aus diesen 100 Personen kann gut mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

d) In einer Schulklasse gibt es 10 Mädchen und 5 Jungen. Der Lehrer bestimmt zufällig 4 Schüler, welche die Klasse an einer Schülerdiskussion vertreten sollen. Die Anzahl Mädchen unter den 4 gewählten Schülern kann gut mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

13. Bei einem Binomialtest ($n = 30$, $\alpha = 0.05$) mit $H_0 : \pi = 0.2$ und $H_A : \pi \neq 0.2$ wurde der Verwerfungsbereich $K = \{0, 1\} \cup \{12, ..., 30\}$ konstruiert. Als Teststatistik X haben wir den Wert $x = 2$ erhalten. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Unter H_0 ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2) = 0.03$.

b) $P_{H_0}(X \notin K) \geq 0.95$.

c) Die Macht für die Alternativhypothese H_A ist $P_{H_A}(X \leq 1) + P_{H_A}(X \geq 12)$.

d) Der P-Wert zur Beobachtung $x = 2$ ist $P_{H_0}(X \leq 2)$.

Gruppe C

t-Test

14. In einer Studie wird die Absorption von einem Eisenergänzungsmittel bei Männern und Frauen untersucht. Dafür wurde 20 Männern und 20 Frauen über 3 Wochen hinweg ein Eisenpräparat verabreicht. Vor und nach der Studie wurde bei den Probanden der Ferritin-Gehalt im Blutplasma gemessen. Ferritin ist ein Eisenspeicherprotein des Organismus und weist auf einen möglichen Eisenmangel hin. Die Differenz im Ferritingehalt je Proband ist in der folgenden Tabelle aufgeführt:

männlich x_i	13	24	19	...	31
weiblich y_i	16	8	22	...	14

Wir nehmen an, dass die männlichen und weiblichen Ferritingehalte jeweils unabhängig voneinander sind, sowie einer Normalverteilung folgen mit Erwartungswert μ_x, beziehungsweise μ_y und gleicher Standardabweichung σ.

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Bei einem ungepaarten t-Test können die Stichprobengrössen in beiden Gruppen gleich sein.

c) Bei gepaarten Stichproben hat der gepaarte t-Test in der Regel eine grössere Macht als der ungepaarte t-Test.

d) Der Welch-Test setzt voraus, dass die Messungen x_i und y_i $(i = 1, \ldots, 20)$ die gleiche Standardabweichung haben.

15. Aus den Daten der Eisen-Studie (vorherige Aufgabe) wurden folgende Kennzahlen ermittelt: $\bar{x} = 20.4$, $\bar{y} = 18.9$ und $\hat{\sigma}_x = 3.1$ und $\hat{\sigma}_y = 4.5$. Wir führen nun einen ungepaarten t-Test durch.

a) Wir legen den Test folgendermassen an: $H_0 : \mu_x = \mu_y,\ H_A : \mu_x \neq \mu_y$. Die Macht des Testes ist so grösser als für $H_A : \mu_x > \mu_y$.

b) Der beobachtete Wert der Teststatistik liegt zwischen 1.20 und 1.25.

c) Unter H_0 folgt die Teststatistik einer t_{39}-Verteilung.

d) Angenommen die Teststatistik wäre 0.64 und der Verwerfungsbereich des Tests $H_0 : \mu_x = \mu_y,\ H_A : \mu_x \neq \mu_y$ wäre $(-\infty, -1.69] \cup [1.69, \infty)$ für das Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$, dann wird die Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen.

16. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir hätten bei der Eisen-Studie unendlich viele Datenpunkte zur Verfügung. Dann wäre unter H_0 die Teststatistik des ungepaarten t-Testes $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt.

b) Angenommen wir würden die Messdaten $\{x_1, ..., x_{20}\}$ und $\{y_1, ..., y_{20}\}$ von der Eisen-Studie zusammenführen als $\{z_1, ..., z_{40}\}$, sodass $z_1 = x_1$,..., $z_{20} = x_{20}$, $z_{21} = y_1$,..., $z_{40} = y_{20}$. Nun führen wir auf diesem Datensatz einen Vorzeichentest durch, um einen durchschnittlichen Eisenzuwachs von 20 zu überprüfen. Die Verteilung der entsprechenden Teststatistik ist nun $Binomial(39, 0.5)$.

c) Angenommen wir betrachten nur die Messdaten der Probandinnen $\{y_1, ..., y_{20}\}$ aus der Eisen-Studie ($\bar{y} = 18.9$ und $\hat{\sigma}_y = 4.5$). Nun führen wir einen t-Test durch mit $H_0 : \mu = 20$ und $H_A : \mu \neq 20$. Ein exaktes zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ ist $[16.79, 21.01]$.

d) Angenommen ein t-Test liefert einen P-Wert, der es uns erlaubt, die Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau zu verwerfen. Dann können wir die Nullhypothese auch auf dem 5%-Signifikanzniveau verwerfen.

17. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Beim t-Test muss die wahre Standardabweichung der Zufallsvariablen bekannt sein.

b) Bei einem Einstichproben t-Test ($H_0 : \mu = 0,\ H_A : \mu > 0$, 35 Beobachtungen insgesamt) ist der beobachtete Wert der Teststatistik 2.44. Dann ist der P-Wert etwa 1%.

c) Beim Wilcoxon-Test müssen die Daten normalverteilt sein.

d) Angenommen wir haben $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei die Standardabweichung ($\sigma = 1$) exakt bekannt ist. Wir wollen, dass die Breite des 95%-Vertrauensintervall für μ höchstens 1 beträgt. Dazu bräuchten wir mindestens $n = 16$ Datenpunkte.

Gruppe C

Lineare Regression

18. Herr Sigrist testet ein neues Pestizid an seinen Tomaten. Dafür teilt er das Beet in n Bereiche mit je $10\,m^2$ Fläche und misst für jedes Feld den Ertrag in kg Tomaten (Variable `ertrag`). Er möchte diesen Ertrag in Abhängigkeit der verwendeten Pestizidmenge (Variable `pestizid`), gemessen in Liter l, beschreiben. Hierfür verwendet er ein lineares Modell:

$$\text{ertrag}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{pestizid}_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-86.92 -10.27   1.99  11.40  38.03

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.0914     6.7169     ???     0.87
pestizid      0.8388     0.0631   13.29   <2e-16 ***
---
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 22.3 on 46 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.793,        Adjusted R-squared:  0.789
```

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Die lineare Regression wurde basierend auf $n = 49$ Datenpunkten berechnet.

b) Der Effekt der Pestizidmenge ist signifikant auf dem 1%-Niveau.

c) Ein approximatives, zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für β_1 ist gegeben durch $[0.71, 0.97]$.

d) Der t-Wert von β_0 ist 0.16.

19. Mit Hilfe des Modells aus der Pestizid-Studie (vorherige Aufgabe) wollen wir nun Vorhersagen machen. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

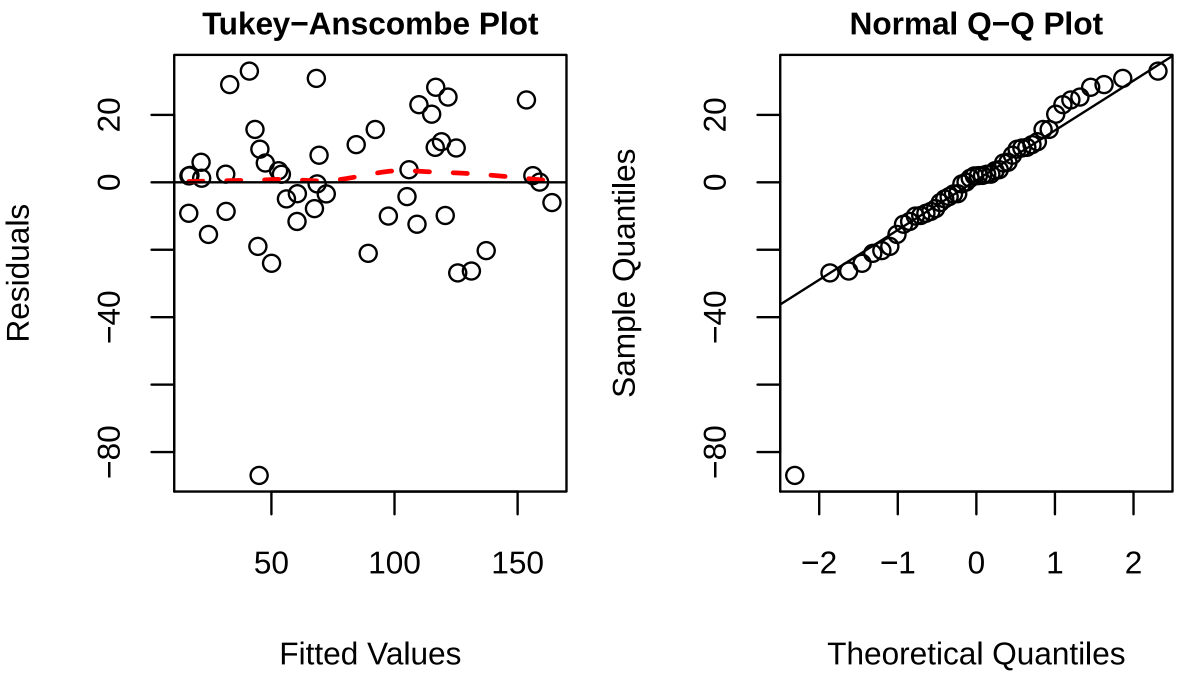
a) Falls die Pestizidmenge um $5\,l$ erhöht wird, so erhöht sich der erwartete Ertrag um etwa $4.19\,kg$ pro Bereich.

b) Falls man im Sinne eines biologischen Anbaus ganz auf den Einsatz von Pestiziden verzichten möchte, so hätte man gemäss des Modells einen erwarteten Ertrag von etwa $0.83\,kg$ pro Bereich.

c) Angenommen man hat mit dem Modell einen erwarteten Ertrag von $40\,kg$ pro Bereich vorhergesagt, dann hat Herr Sigrist etwa $33.55\,l$ Pestizid eingesetzt.

d) Das 95%-Vorhersageintervall für den Ertrag ist immer breiter als das 95%-Vertrauensintervall für den erwarteten Ertrag bei gleicher Pestizidmenge.

20. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots, welche die Residuen aus dem Regressionsmodell der Pestizid-Studie zeigen.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

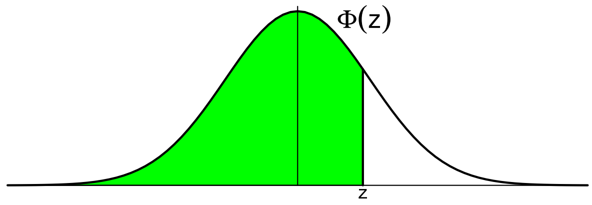
a) Die Fehlervarianz ist in etwa konstant.

b) Der Mittelwert der Residuen ist in etwa 0.

c) Die Residuen sind kurzschwänzig verteilt. Die Normalitätsannahme ist stark verletzt.

d) Sowohl der Tukey-Anscombe wie auch der QQ Plot deuten auf einen Ausreisser hin. Es wäre ratsam, diesen Ausreisser von der Analyse auszuschliessen oder robuste Methoden zu verwenden.

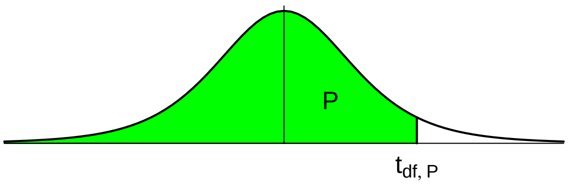
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \leq z\right], \; Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \leq 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576