Schriftliche Prüfung
(90 Minuten)

Bemerkungen:

- Alle schriftlichen Hilfsmittel und ein Taschenrechner sind erlaubt.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Die Prüfung besteht aus insgesamt **16 Aufgaben**.
- Markieren Sie Ihre Antworten auf dem beiliegenden **Antwortblatt**.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Jede Aufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Aufgabe kann keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein.
- Für jede Aussage gibt es 1 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird. 1 Punkt wird abgezogen, wenn eine Aussage falsch markiert wird. Wenn eine Aussage nicht markiert wird, gibt es keinen Punkt, es wird aber auch kein Punkt abgezogen. Die Punkte werden über die gesammte Prüfung summiert.

Viel Erfolg!

I. Binomialverteilung und -test

1. Angenommen $X \sim \text{Bin}(n = 20, p = 0.4)$. Dann gilt ...

a) $\text{Var}(X) = 4.8$.

b) $\text{E}[X] = 8$.

c) $\text{P}(X = 3) = 0.01$.

d) $\text{P}(X \leq 3) = 0.02$.

2. Bei einem Binomialtest $(n = 10, \alpha = 0.05)$, mit $H_0 : p = 0.5$ und $H_A : p > 0.5$ wurde der Verwerfungsbereich $K = \{9, 10\}$ konstruiert.

a) Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art ist kleiner gleich 0.05.

b) Wenn wir nun die Alternativhypothese als $H_A : p = 0.8$ festlegen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art 0.62.

c) Angenommen die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art ist 0.32, dann ist die Macht des Tests 0.68.

d) Die Macht für die Alternative $H_A : \; p = 0.7$ ist grösser als die Macht für die Alternative $H_A : \; p = 0.8$.

3. Wir möchten einen Binomialtest mit dem Modell $X \sim Bin(n = 13, p)$, $H_0 : \; p = 0.4$ und $H_A : \; p < 0.4$ auf dem 5%-Signifikanzniveau durchführen.

a) Der Verwerfungsbereich für die Teststatistik ist K= $\{0, 1\}$.

b) Der Verwerfungsbereich ist in diesem Fall definiert als K= $\{c, ..., 13\}$, wobei c die kleinste ganze Zahl ist, so dass $\text{P}_{H_0}(X \in \{c, ..., 13\}) \leq 5\%$

c) Wenn man den Test auf dem 1%-Signifikanzniveau durchführt, wird der Verwerfungsbereich gleich viele oder weniger (aber nicht mehr) Elemente enthalten.

d) Angenommen der Verwerfungbereich für die Anzahl Erfolge ist $K = \{10, 11, 12, 13\}$ und wir beobachten sieben Erfolge. Damit ist bewiesen, dass die Nullhypothese stimmt.

4. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ein Hedgefond prüft mit einem Binomialtest, ob die Erfolgsrate einer neuen Strategie Z besser als 0.6 ist. Die Händler maximieren die Macht, wenn sie die Alternative $H_A : p \neq 0.6$ wählen.

b) Wir führen einen Binomialtest mit $H_0 : p = 0.6$ und $H_A : p > 0.6$ durch. Gegeben sind $n = 40$ Datenpunkte X_i, $i = 1, \dots n$, die alle unabhängig voneinander Bernoulli verteilt sind. Wir berechnen die Teststatistik $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ als $T = 36$. Der P-Wert berechnet sich dann als $P_{H_0}(T \geq 36)$.

c) Ein fairer Würfel (mit Augenzahlen 1 bis 6) wurde 100-mal geworfen und hat 53 mal eine Augenzahl kleiner als 4 angezeigt. Wir führen einen Binomialtest mit diesen Daten durch (X: Anzahl Würfe mit Augenzahl kleiner als 4; $H_0 :\ p = 0.5, H_A :\ p > 0.5$). Der P-Wert ist dann kleiner als 1%.

d) Ein zweiseitiger Binomialtest kann gut verwendet werden (bei hinreichend grosser Macht), um zu testen ob die Erfolgswahrscheinlichkeit nahe bei 0 oder 1 ist.

5. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Ein fairer fünfseitiger Würfel (mit Augenzahlen 1 bis 5) wird 93 mal unabhängig voneinander geworfen. M ist die Zufallsvariable, die die Anzahl Würfe mit Augenzahl 4 beschreibt. M kann gut durch eine Binomialverteilung mit $n = 93$ und $p = 0.2$ modelliert werden.

b) Eine Binomialverteilung mit $n = 4$ und Erwartungswert 0.2 kann gut durch eine Normalverteilung approximiert werden.

c) Die Auskunftszentrale der Swisscom will die Anzahl Anrufe pro Stunde mit einer Poissonverteilung modellieren. Durchschnittlich rufen 134 Personen pro Stunde an. Die Anzahl Anrufe pro Stunde kann dann als $Pois(\lambda = 1/134)$ modelliert werden.

d) Wenn X exponentialverteilt ist, dann gilt $P(X = 1) > 0$.

II. t-Test

6. Die Pharmafirma Sitravon testet ein neues Blutdruckmedikament auf seine Wirkung. Dazu wird der Blutdruck von 93 Testpersonen vor Einnahme und nach Einnahme des Medikaments gemessen. Nachfolgend sehen sie eine Tabelle mit den Testergebnissen. Jede Spalte entspricht einem Patienten, mit den Zeilen *Vorher* (Blutdruck vor Einnahme des Medikamentes) und *Nachher* (Blutdruck nach Einnahme des Medikamentes).

	Patient 1	Patient 2	Patient 3	...	Patient 93
Vorher	100	120	126	...	117
Nachher	104	136	105	...	109
Differenz	-4	-16	21	...	8

Wir nehmen nun an, dass die Differenzen D des Blutdrucks vor und nach Einnahme des Medikaments (D=Vorher-Nachher) unabhängig voneinander und normalverteilt mit Erwartungswert μ_D und Standardabweichung σ_D sind. Aus den Daten wurden $\hat{\mu}_D = \bar{D} = 9.81$ und $\hat{\sigma}_D = s_D = 7.01$ geschätzt.

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Es handelt sich um gepaarte Stichproben.

b) Bei einem ungepaarten t-Test müssen die Stichprobengrössen in beiden Gruppen ungleich sein.

c) Der gepaarte t-Test setzt im Vergleich zum ungepaarten t-Test nicht voraus, dass die einzelnen Messungen (Patienten) voneinander unabhängig sind und wird deshalb oft in medizinischen Studien verwendet.

d) Der gepaarte t-Test setzt voraus, dass die Messungen *Vorher* und *Nachher* jeweils die gleiche Standardabweichung haben.

7. Wir führen einen gepaarten t-Test mit den Daten aus Aufgabe 6 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ durch.

a) Wir legen den Test folgendermassen an: $H_0 : \mu_D = 0$, $H_A : \mu_D > 0$. Die Wahrscheinlichkeit, dass wir schliessen können, dass das Medikament den Blutdruck senkt, ist so am grössten.

b) Der beobachtete Wert der Teststatistik ist 13.59.

c) Unter H_0 folgt die Teststatistik einer t_{92}-Verteilung.

d) Angenommen das 95%-Vertrauensintervall für μ_D ist $[0.05, \infty)$, dann wird die Nullhypothese ($H_0 : \mu_D = 0$) auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen.

8. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Wir berechnen zuerst ein Vertrauensintervall basierend auf dem z-Test, dann berechnen wir mit den gleichen Daten ein Vertrauensintervall des t-Tests. Dieses ist immer grösser als das erste Intervall, da wir beim t-Test noch die Varianz schätzen müssen und deshalb eine zusätzliche Unsicherheit haben.

b) Angenommen ein t-Test liefert einen P-Wert, der es uns erlaubt, die Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau zu verwerfen. Wir können die Nullhypothese also in jedem Fall auch auf dem 0.5%-Signifikanzniveau verwerfen.

c) Ein exaktes zweiseitiges 99%-Vertrauensintervall für μ_D aus Aufgabe 6 ist $[7.90, 11.72]$. (Benütze zur Berechnung das Quantil 2.63.)

d) Bei einem Einstichproben t-Test ($H_0 : \mu = 1, H_A : \mu > 1$, 23 Beobachtungen insgesamt) ist der beobachtete Wert der Teststatistik 1.3. Dann ist der P-Wert etwa 10%.

III. Lineare Regression

9. Durch die Aufforstung von Waldstücken kann deren Holzertrag erhöht werden. Es wird versucht, den Ertrag (in m^3 Holz pro Hektar (ha) Waldfläche) aus 36 Waldstücken in Abhängigkeit der geleisteten Aufforstung (in Arbeitsstunden) als Regression zu beschreiben. Folgendes Modell wird angepasst:

$$\text{ertrag}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{aufforstung}_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-18.196  -9.445  -0.979   6.036  25.380

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   16.765      5.035     ???      ???
aufforstung    0.441        ???    4.25  0.00016 ***
---
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 11 on ?? degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.347,        Adjusted R-squared:  0.328
```

Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Der Effekt von β_0 ist signifikant auf dem 1%-Niveau.

b) Der residual standard error wurde mit 34 Freiheitsgraden berechnet.

c) Der geschätzte Standardfehler des Parameters $\hat{\beta}_1$ ist in etwa 9.64.

d) Angenommen Null ist im 95%-Vertrauensintervall für β_0 enthalten, dann kann $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden.

10. Mit Hilfe des Modells aus Aufgabe 9 wollen wir nun Vorhersagen machen. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

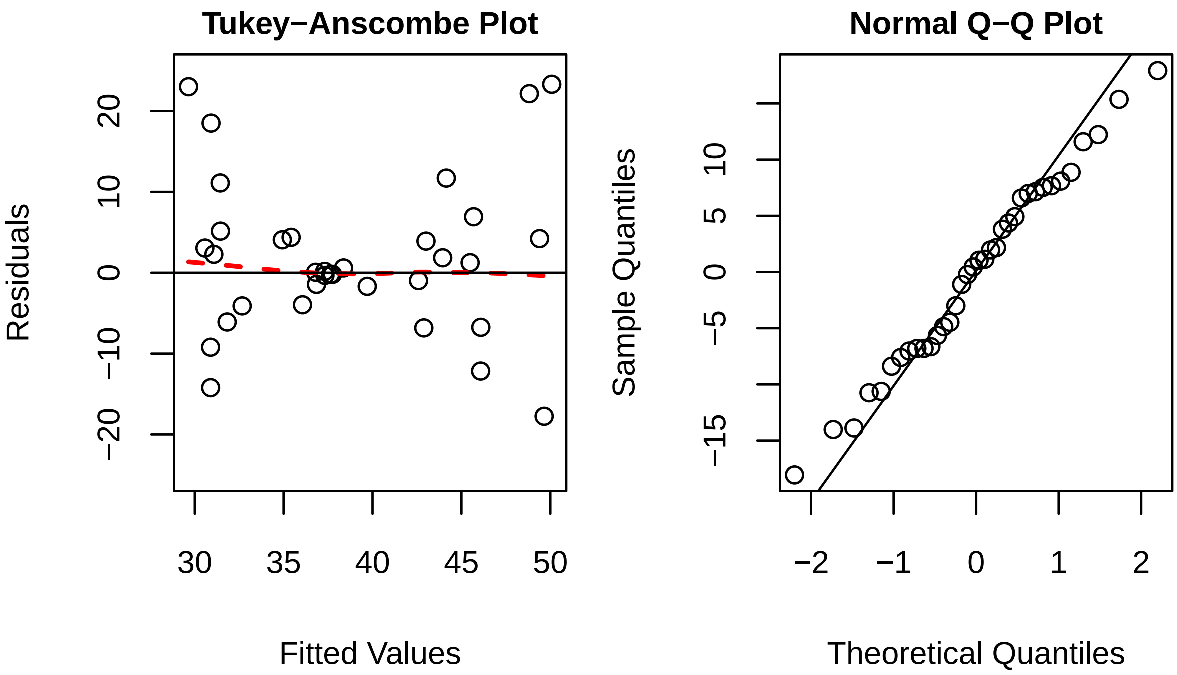
a) Falls man für ein Waldstück keine Zeit zum Aufforsten hatte, dann hat man trotzdem einen erwarteten Ertrag von etwa $16.8\frac{m^3}{ha}$.

b) Angenommen man hat mit dem Modell einen erwarteten Ertrag von $41\frac{m^3}{ha}$ vorhergesagt, dann hat man 55 Stunden aufgeforstet.

c) Angenommen wir hätten ein 99%-Vorhersageintervall [55.6, 62.2] (in $\frac{m^3}{ha}$) für den erwarteten Ertrag bei einer Aufforstung von 90 Stunden. Das bedeutet, wenn wir 90 Stunden Aufforstung pro Hektar investieren, dann können wir mit 99% Wahrscheinlichkeit mit einem Ertrag von 55.6 bis $62.2\frac{m^3}{ha}$ rechnen.

d) Das 99%-Vorhersageintervall aus Teilaufgabe c) beschreibt den Bereich, in welchem sich der erwartete Ertrag bei einer Aufforstung von 90 Stunden mit 99% Wahrscheinlichkeit befindet.

11. Betrachten Sie die nachfolgenden Plots, welche die Residuen aus dem Regressionsmodell der Aufgabe 9 zeigen.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen wir nehmen die Wurzel aus der geleisteten Aufforstung als erklärende Variable ($\text{ertrag}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \sqrt{\text{aufforstung}_i} + \epsilon_i$), dann ist dieses Regressionsmodell kein lineares Modell.

b) Die Fehlervarianz ist konstant.

c) Der Erwartungswert der Residuen ist in etwa 0.

d) Die Residuen sind langschwänzig verteilt. Die Normalitätsannahme ist verletzt.

IV. Gemischte Fragen

12. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $E(X) = 4$ und $E(Y) = 6$, wobei X und Y unabhängig sind. Dann gilt $E[4Y - 3X - 10] = 2$.

b) Sei $Var(X) = 4$ und $Var(Y) = 3$, wobei X und Y unabhängig sind. Dann gilt $Var(4Y - 2X + 5) = 64$.

c) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt mit $\mu = 7$ und $\sigma = 3$. Dann gilt $Var((X + X - 1)/2) = 9$.

d) Wir schätzen die Korrelation zwischen zwei Zufallsvariablen M und N auf 0.98. Da die Korrelation sehr stark ist, können wir davon ausgehen, dass M der Verursacher von N ist (oder umgekehrt, je nach Bedeutung von M und N).

13. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Angenommen A und B sind unabhängig. Wenn $P(A) = 0.2$ und $P(B) = 0.3$, dann gilt $P(A \cap B) = 0.6$.

b) Es seien $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ und $P(A \cap B) = 0.2$. Dann gilt $P((A \cup B)^c) = 0.4$.

c) Angenommen, für die Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ gilt $P(A|B) < P(B|A)$. Dann können wir daraus schliessen, dass $P(A) > P(B)$.

d) Mit 80% Wahrscheinlichkeit erhält eine Frau ohne Brustkrebs ein negatives Testresultat und mit 90% Wahrscheinlichkeit erhält eine Frau mit Brustkrebs ein positives Testresultat. Angenommen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau Brustkrebs hat, ist 2%. Nun hat eine Frau bei einer Mammographie ein positives Testresultat erhalten. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie wirklich an Brustkrebs leidet, ungefähr 8%.

14. Es sei Z eine Zufallsvariable und es gilt $Z \sim \mathcal{N}(4, 4)$.

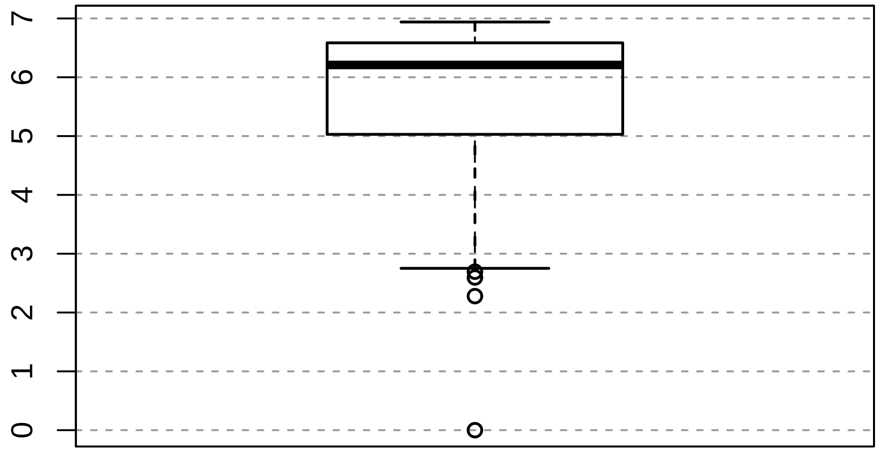
a) Die Wahrscheinlichkeitsdichte von Z ist $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-(x-4)^2/8\right)$.

b) Die Zufallsvariable $\frac{Z-4}{4}$ ist $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt.

c) $P(Z \leq -1) = P(Z > 9)$.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallszahl z (eine Realisierung der Zufallvariable Z) zwischen 2 und 6 liegt ist etwa 95%.

15. Betrachten Sie den nachfolgenden Boxplot.



Beurteilen Sie folgende Aussagen.

a) Bei diesen Daten sind der Median und der Mittelwert gleich.

b) Die Interquartilsdistanz (engl. IQR) beträgt 2.

c) Werte kleiner als 2.5 sind eher untypisch für diese Daten.

d) Die Daten sind rechtsschief verteilt.

16. Beurteilen Sie folgende Aussagen.

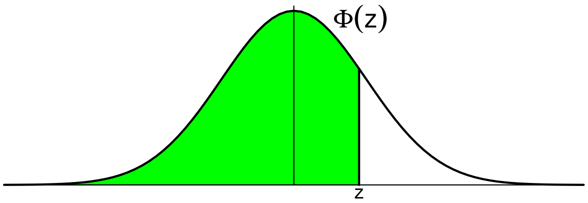
a) Wenn $odds(F) = 2$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis F eintritt, $1/2$ so gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis F nicht eintritt.

b) Ein durchschnittlicher Lachsfisch wird etwa 1 m lang und erreicht ein Gewicht von 10 kg ($\pm$ 2 kg Standardabweichung). Ein Fischerboot fängt an einem guten Tag 30 Lachsfische. Die Gewichte der Fische seien unabhängig voneinander. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fang mehr als 330 kg wiegt, kleiner als 1%.

c) Für eine Studie messen wir die mittlere Konzentration von schädlichen Aerosolen in der Nähe von Industrieanlagen. Nach 100 Messungen haben wir einen Standardfehler von 25 ppm (parts per million) für das arithmetische Mittel. Der Studienleiter fordert aber einen Standardfehler, der nicht grösser als 5 ppm sein soll. Daher müssen wir jetzt noch fünfmal soviele Messungen machen.

d) Ein Gefangener erhält eine letzte Chance, seinem Todesurteil zu entkommen. Er erhält zwei Urnen, 50 weisse Kugeln und 50 schwarze Kugeln. Er muss alle Kugeln beliebig in die Urnen abfüllen. Mit einem fairen Münzwurf wird eine der beiden Urnen bestimmt, aus welcher er mit verbundenen Augen eine Kugel ziehen darf. Wenn die Kugel weiss ist, wird er begnadigt.
Der Gefangene ist gerissen und erinnert sich an den Statistikkurs, welchen er zu besseren Zeiten besucht hat. Er füllt eine einzelne weisse Kugel in die eine Urne und alle anderen Kugeln in die andere Urne. Somit ist seine Chance auf eine weisse Kugel 74.7% (auf eine Nachkommastelle genau).

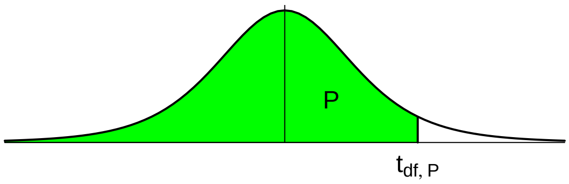
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \leq z\right], \; Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \leq 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576